III. Oscillateur non linéaire à un degré de liberté
1.1

1.1.

D'après le problème, on a $\vec{F}_{ressort \to m} = -kq\,(1+aq^2)\,\vec{x}_0$

$m\ddot{q} = F_{ressort \to m}$

$\therefore \ddot{q} + \frac{k}{m} q\,(1+aq^2) = 0$

$\Rightarrow \ddot{q} + w_0^2 q\,(1+aq^2) = 0$

D'après le schéma de Newmark

$q_{j+1} = q_j + \Delta t \cdot \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5)\,\ddot{q}_j$

$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t \cdot \frac{1}{2}\ddot{q}_j + 0.5\Delta t\,\ddot{q}_{j+1}$

$\ddot{q}_{j+1} = -\frac{k}{m} q_{j+1}\,(1+a\,q_{j+1}^2)$

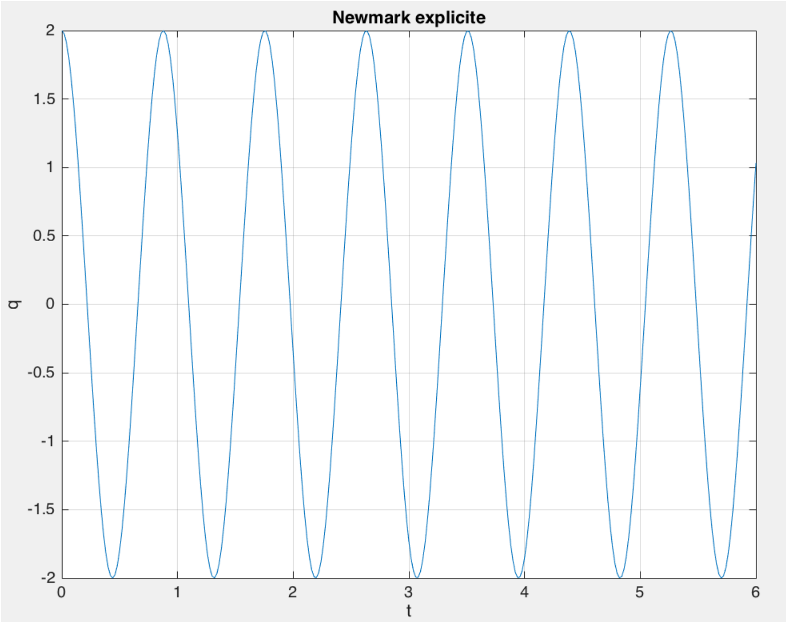
$= -w_0^2 q_{j+1}\,(1+a \cdot q_{j+1}^2)$

donc on peut déterminer $\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} \end{pmatrix}$.

1.2 On résout l'équation 2 avec un schéma de NEWMARK explicite

```
q0=2;dq0=0;w0=2*pi;T0=6;dt=0.02;a=0.1;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q1b=zeros(nb,1);
dq1b=zeros(nb,1);
ddq1b=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
dq1b(1)=dq0;
ddq1b(1)=-w0*w0*q1b(1)*(1+a*q1b(1)*q1b(1));
for i=2:nb
    q1b(i)=q1b(i-1)+dt*dq1b(i-1)+0.5*dt*dt*ddq1b(i-1);
    ddq1b(i)=-w0*w0*q1b(i)*(1+a*q1b(i)*q1b(i));
    dq1b(i)=dq1b(i-1)+0.5*dt*ddq1b(i-1)+0.5*dt*ddq1b(i);

end
q1b(1)
q1b(2)
q1b(3)
q1b(end)
plot(t,q1b),hold on
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q');
title('Newmark explicite')
```

Avec le schéma



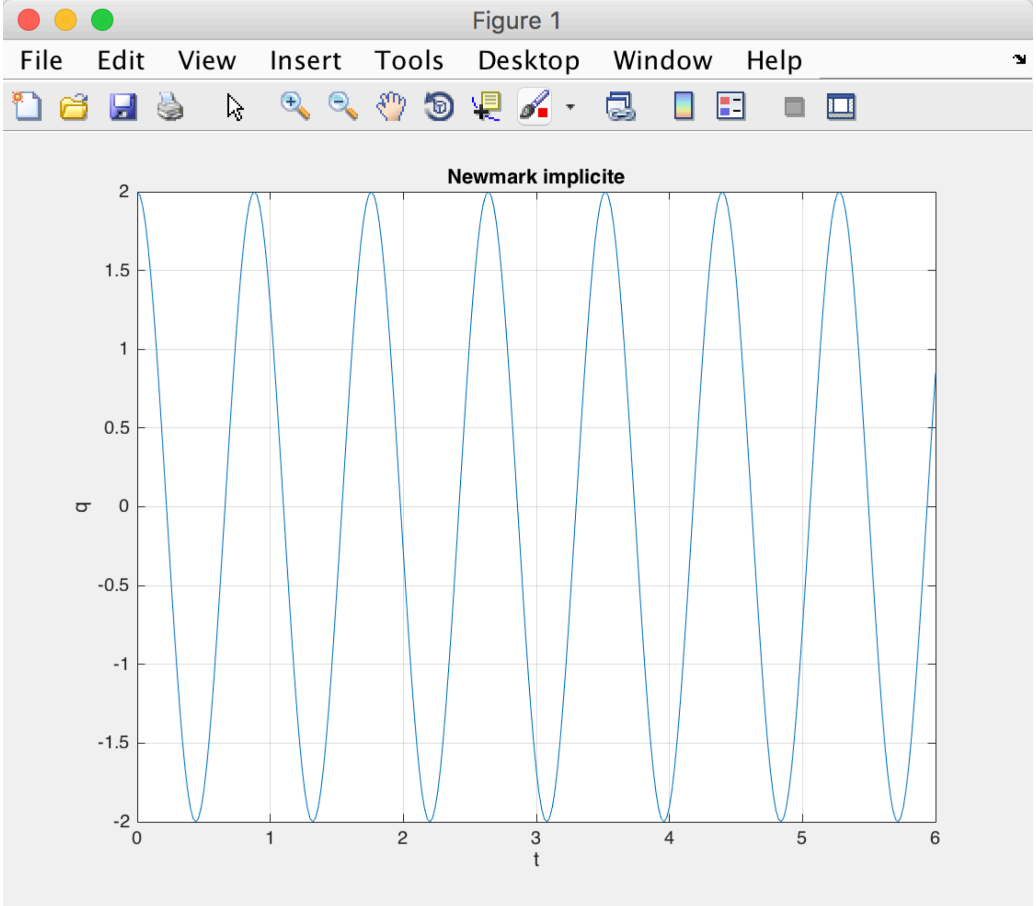
1.3
On peut obtenir les résultat avec MATLAB

```
ans =

     2


ans =

    1.9779


ans =

    1.9123


ans =

    1.0329
```

2.La solution utilisant NEWMARK implicite s’écrit

```
clear all
close all
q0=2;dq0=0;w0=2*pi;T0=6;dt=0.02;a=0.1;
r=0.5;b=0.25;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q1b=zeros(nb,1);
dq1b=zeros(nb,1);
ddq1b=zeros(nb,1);
d_q1b=zeros(nb,1);
d_dq1b=zeros(nb,1);
d_ddq1b=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
dq1b(1)=dq0;
ddq1b(1)=-w0*w0*q1b(1)*(1+a*q1b(1)*q1b(1));
for i=2:nb
    ddq1b(i)=0;
    dq1b(i)=dq1b(i-1)+(1-r)*dt*ddq1b(i-1);
    q1b(i)=q1b(i-1)+dt*dq1b(i-1)+(0.5-b)*dt*dt*ddq1b(i-1);
    d_ddq1b(i)=(-(ddq1b(i)+w0*w0*q1b(i)*(1+a*q1b(i)*q1b(i))))/(1+b*dt*dt*(3*w0*w0*a*q1b(i)*q1b(i)+w0*w0));
    d_q1b(i)=b*dt*dt*d_ddq1b(i);
    d_dq1b(i)=r*dt*d_ddq1b(i);
    q1b(i)=q1b(i)+d_q1b(i);
    dq1b(i)=dq1b(i)+d_dq1b(i);
    ddq1b(i)=ddq1b(i)+d_ddq1b(i);
end
q1b(1)
q1b(2)
q1b(3)
q1b(end)
plot(t,q1b),hold on
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q');
title('Newmark implicite')
```

avec le schéma



donc on peut obtenir les valeurs de 0s, dt, 2dt, T0 s'écrivent

```
ans =

     2


ans =

    1.9781


ans =

    1.9131


ans =

    0.8478
```

qui est le même que NEWMARK explicite.

3. On calcule l'énergie. （Pour dt=0.02）
L'énergie mécanique est définie par

E_massique(i)=1/2*dq1b(i)*dq1b(i)+1/2*w0*w0*q1b(i)^2+a/4*w0*w0*q1b(i)^4
Avec dt=0.02, on a les graphs ci-dessous. Et on a trouvé que E massique reste à peu près égale à

```
clear all
close all
q0=2;dq0=0;w0=2*pi;T0=6;dt=0.02;a=0.1;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q1b=zeros(nb,1);
dq1b=zeros(nb,1);
ddq1b=zeros(nb,1);
E_massique=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
dq1b(1)=dq0;
ddq1b(1)=-w0*w0*q1b(1)*(1+a*q1b(1)*q1b(1));
E_massique(1)=1/2*dq1b(1)*dq1b(1)+1/2*w0*w0*q1b(1)^2+a/4*w0*w0*q1b(1)^4;
for i=2:nb
    q1b(i)=q1b(i-1)+dt*dq1b(i-1)+0.5*dt*dt*ddq1b(i-1);
    ddq1b(i)=-w0*w0*q1b(i)*(1+a*q1b(i)*q1b(i));
    dq1b(i)=dq1b(i-1)+0.5*dt*ddq1b(i-1)+0.5*dt*ddq1b(i);
    E_massique(i)=1/2*dq1b(i)*dq1b(i)+1/2*w0*w0*q1b(i)^2+a/4*w0*w0*q1b(i)^4;
end
plot(t,E_massique),hold on
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q');
title('Newmark explicite et E massique')
```

un constant. Mais avec un peu d'oscillation.

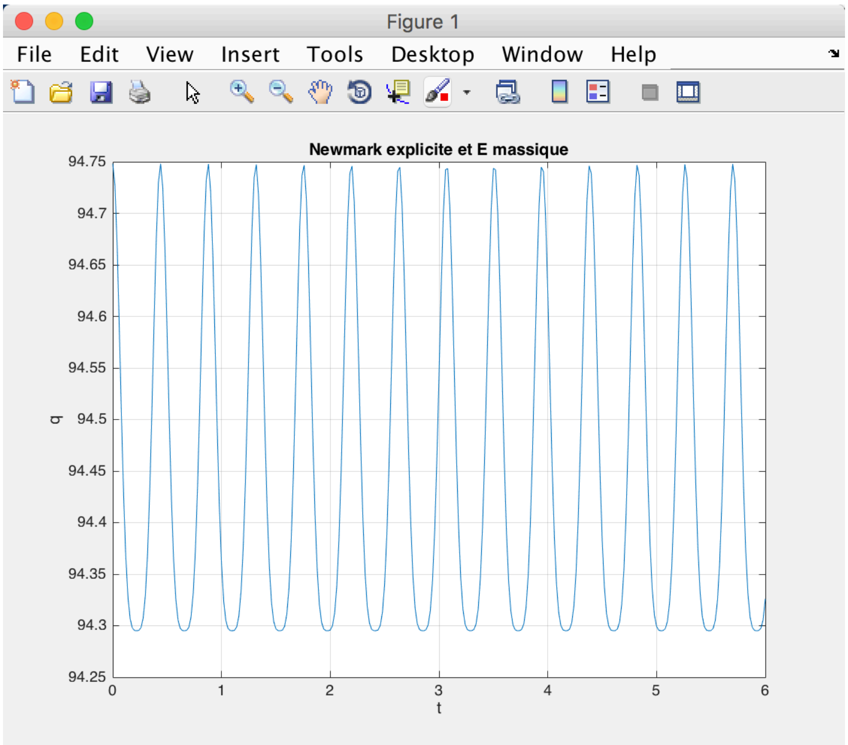


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Newmark explicite et E massique
94.75
94.7
94.65
94.6
94.55
94.5
94.45
94.4
94.35
94.3
94.25
q
0
1
2
3
4
5
6
t