L'exercice Oscillateur conservatif à un degré de liberté

2.1 D'après l' équation 1 : $\ddot{q} = -w0^2 * q$

Donc, $\begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix}$

D'après l' équation 5 : $\begin{bmatrix} q_{i+1} \\ \dot{q}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -w0^2 * \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix}$

2.2 a) Code en Matlab

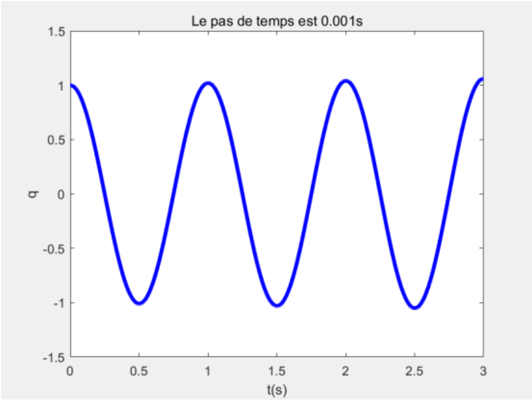
```
dt1=0.05;T0=3;
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;w0c=w0*w0;
t1=(0:dt1:T0)'
np1=size(t1,1);
q1=zeros(np1,1);
dq1=zeros(np1,1);
ddq1=zeros(np1,1);
energe1=zeros(np1,1);
q1(1)=q0;dq1(1)=dq0;
ddq1(1)=-w0c*q1(1);
%Euler Explicite
%sans matrice d'amplification
for inc=2:np1
    q1(inc)=q1(inc-1)+dt1*dq1(inc-1);
    dq1(inc)=dq1(inc-1)+dt1*ddq1(inc-1);
    ddq1(inc)=-w0c*q1(inc)
end;
energie=0.5*(dq1.*dq1+w0c*(q1.^2));
plot(t1,q1,'b-','Linewidth',3)
```

b) Code en Matlab

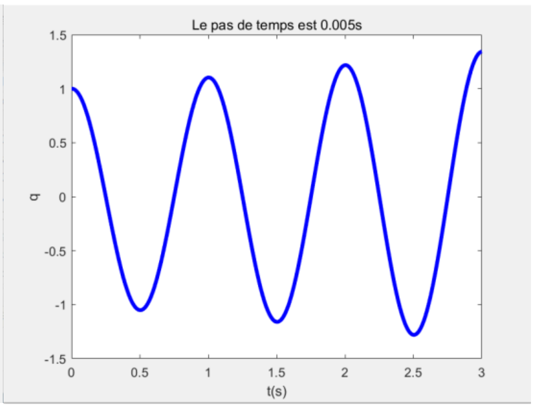
```
dt1=0.01;T0=3;
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;w0c=w0*w0;
t1=(0:dt1:T0)';
np1=size(t1,1);
energie2=zeros(np1,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(np1,1);
dq1b=zeros(np1,1);
dq1b(1)=dq0
q1b(1)=q0
A=[1,dt1;-w0c*dt1,1]
for inc=2:np1
    q=A*q
```

```
      q1b(inc)=q(1)
    dq1b(inc)=q(2)
end;
plot(t1,q1b,'b-','Linewidth',3);
```

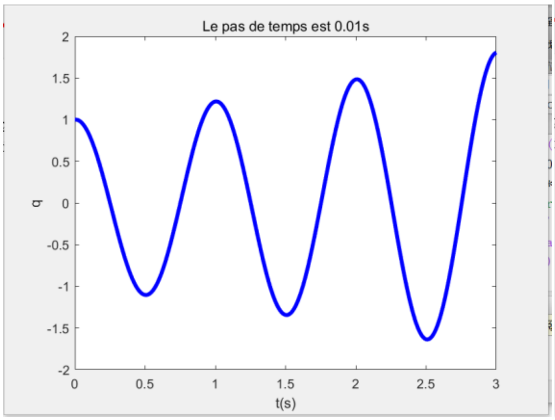
2.3 Nous utilisons la première méthode d'Euler explicite pour analyser l'effet de différents pas de temps sur la divergence.



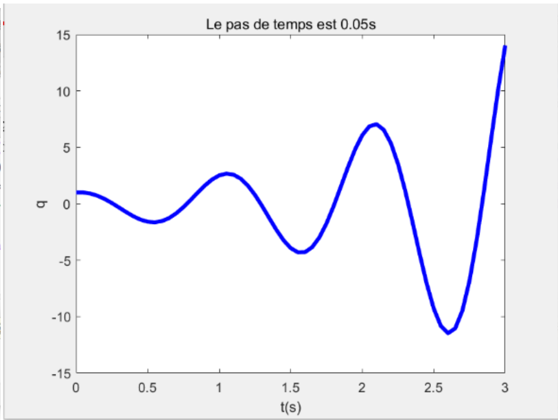
$\Delta t = 0.001s$



$\Delta t = 0.005s$



$\Delta t = 0.01s$



$\Delta t = 0.05s$

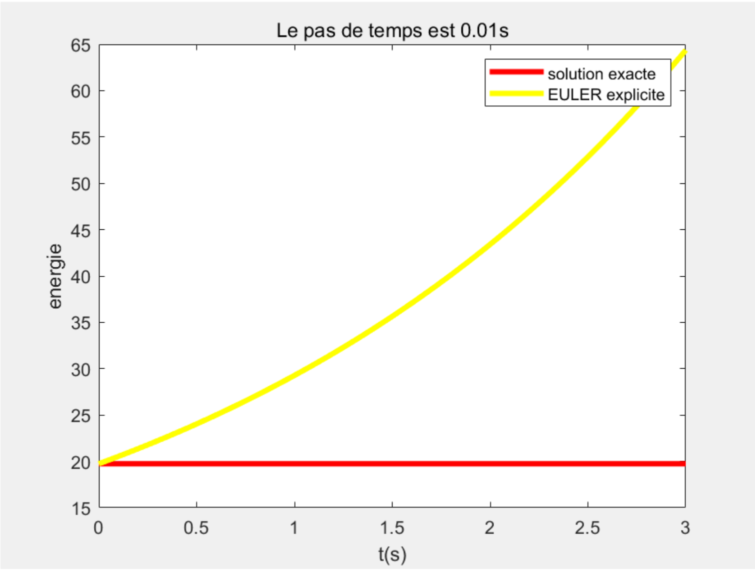
On peut voir que la solution numérique obtenue avec ce schéma d'intégration divergente et plus le pas de temps est petit, plus la divergence est lente.

2.4 Quand $\Delta t = 0.01s$, la quantité E^* de la solution exacte est : $E^* = 19.7392$

Quand $\Delta t = 0.01s$, la quantité E^* associée au schéma d'EULER explicite(méthode 1& méthode 2) est :

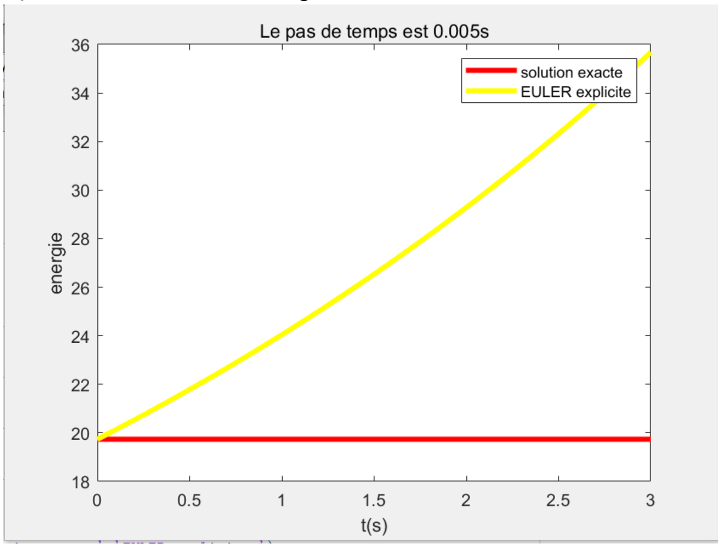
19.7392 19.8171 19.8954 19.9739 20.0528 20.1319 20.2114 20.2912 20.3713 20.4517
20.5325 20.6135 20.6949 20.7766 20.8586 20.9410 21.0237 21.1066 21.1900 21.2736
21.3576 21.4419 21.5266 21.6116 21.6969 21.7825 21.8685 21.9549 22.0415 22.1286
22.2159 22.3036 22.3917 22.4801 22.5688 22.6579 22.7474 22.8372 22.9273 23.0178
…
62.1262 62.3714 62.6177 62.8649 63.1130 63.3622 63.6123 63.8635 64.1156 64.3687

La figure est la suivante:

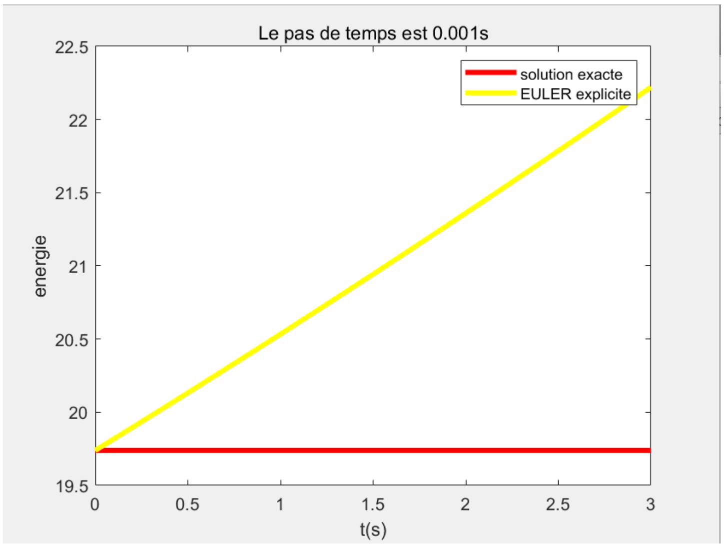


Le premier résultat d'EULER explicite est la solution exacte. Et puis, les résultats d'EULER explicite divergent.

Quand $\Delta t = 0.005s$, la quantité E^* associée au schéma d'EULER explicite est :



Quand $\Delta t = 0.001s$, la quantité E^* associée au schéma d'EULER explicite est :



Donc, plus le pas de temps est petit, plus la quantité augmente lentement.

2.5 On calcule : $\det(A-\lambda I)=0$, avec $A=\begin{bmatrix}1 & \Delta t\\ -{\omega_0}^2\Delta t & 1\end{bmatrix}$

Les valeurs propres de la matrice d'amplification en fonction du pas de temps Δt sont :

$$\lambda_1 = 1 - i\omega_0\Delta t \qquad \lambda_2 = 1 + i\omega_0\Delta t$$

$|\lambda| = \sqrt{1+{\omega_0}^2\Delta t^2} > 1$, la solution est instable.