L'exercice Oscillateur conservatif à un degré de liberté

2.1 D'après l' équation 1 : $\ddot{q} = -w0^2 * q$

Donc, $\begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix}$

D'après l' équation 5 : $\begin{bmatrix} q_{i+1} \\ \dot{q}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -w0^2 * \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix}$

2.2 a) Code en Matlab

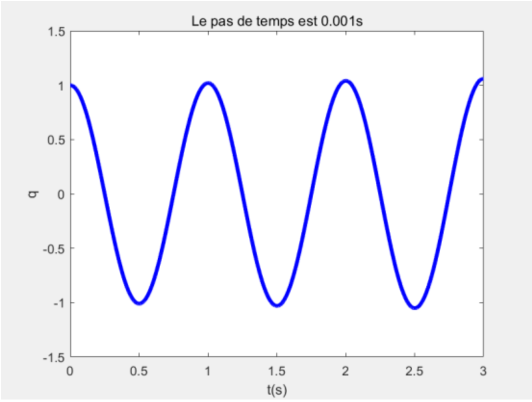
```
dt1=0.05;T0=3;
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;w0c=w0*w0;
t1=(0:dt1:T0)'
np1=size(t1,1);
q1=zeros(np1,1);
dq1=zeros(np1,1);
ddq1=zeros(np1,1);
energe1=zeros(np1,1);
q1(1)=q0;dq1(1)=dq0;
ddq1(1)=-w0c*q1(1);
%Euler Explicite
%sans matrice d'amplification
for inc=2:np1
    q1(inc)=q1(inc-1)+dt1*dq1(inc-1);
    dq1(inc)=dq1(inc-1)+dt1*ddq1(inc-1);
    ddq1(inc)=-w0c*q1(inc)
end;
energie=0.5*(dq1.*dq1+w0c*(q1.^2));
plot(t1,q1,'b-','Linewidth',3)
```

b) Code en Matlab

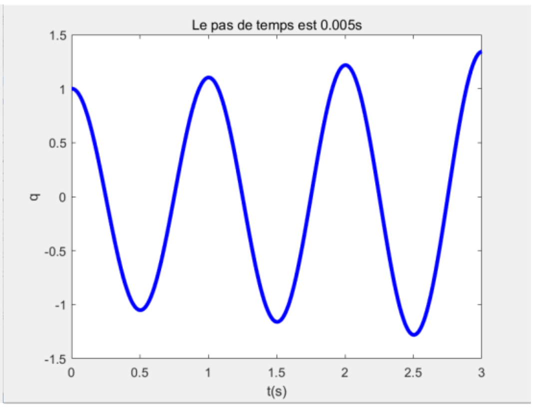
```
dt1=0.01;T0=3;
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;w0c=w0*w0;
t1=(0:dt1:T0)';
np1=size(t1,1);
energie2=zeros(np1,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(np1,1);
dq1b=zeros(np1,1);
dq1b(1)=dq0
q1b(1)=q0
A=[1,dt1;-w0c*dt1,1]
for inc=2:np1
```

```
        q=A*q
        q1b(inc)=q(1)
      dq1b(inc)=q(2)
    end;
    plot(t1,q1b,'b-','Linewidth',3);
```

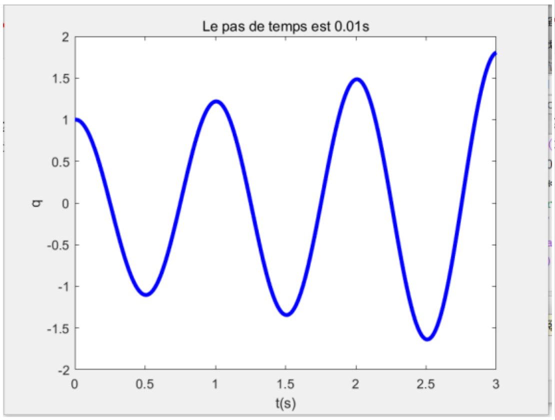
2.3 Nous utilisons la première méthode d'Euler explicite pour analyser l'effet de différents pas de temps sur la divergence.



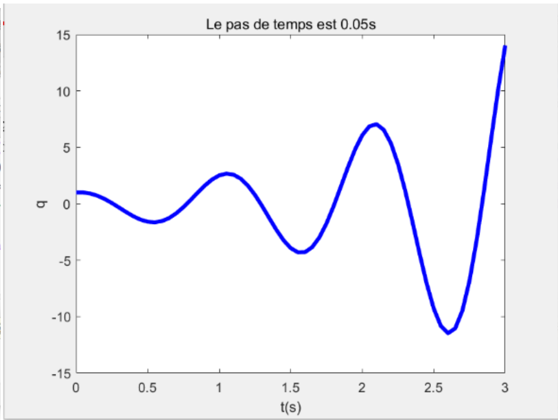
$\Delta t = 0.001s$



$\Delta t = 0.005s$



$\Delta t = 0.01s$



$\Delta t = 0.05s$

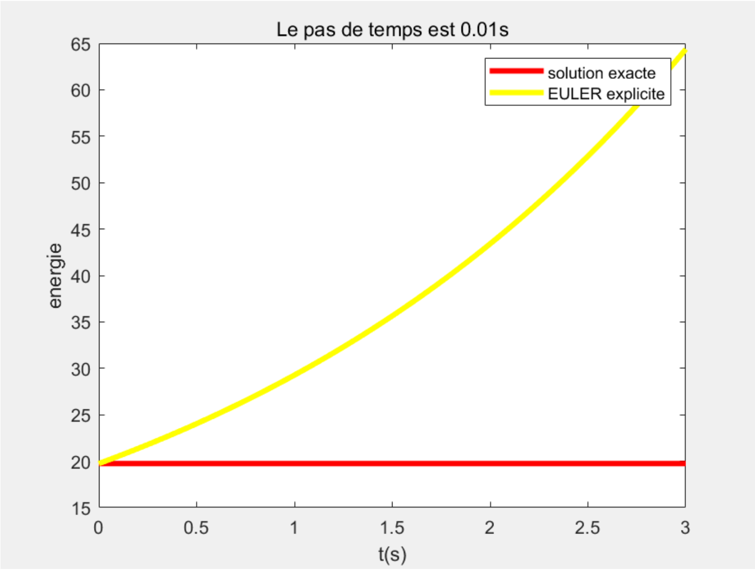
On peut voir que la solution numérique obtenue avec ce schéma d'intégration divergente et plus le pas de temps est petit, plus la divergence est lente.

2.4 Quand $\Delta t = 0.01s$, la quantité E^* de la solution exacte est : $E^* = 19.7392$

Quand $\Delta t = 0.01s$, la quantité E^* associée au schéma d'EULER explicite(méthode 1& méthode 2) est :

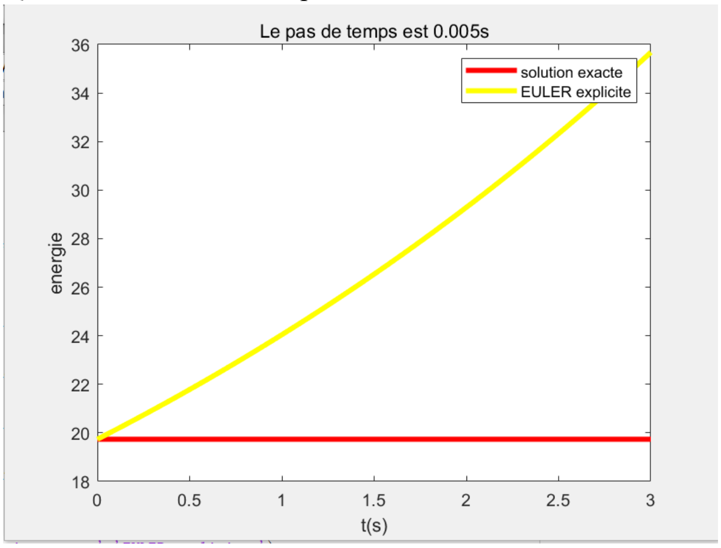
19.7392 19.8171 19.8954 19.9739 20.0528 20.1319 20.2114 20.2912 20.3713 20.4517
20.5325 20.6135 20.6949 20.7766 20.8586 20.9410 21.0237 21.1066 21.1900 21.2736
21.3576 21.4419 21.5266 21.6116 21.6969 21.7825 21.8685 21.9549 22.0415 22.1286
22.2159 22.3036 22.3917 22.4801 22.5688 22.6579 22.7474 22.8372 22.9273 23.0178
…
62.1262 62.3714 62.6177 62.8649 63.1130 63.3622 63.6123 63.8635 64.1156 64.3687

La figure est la suivante：

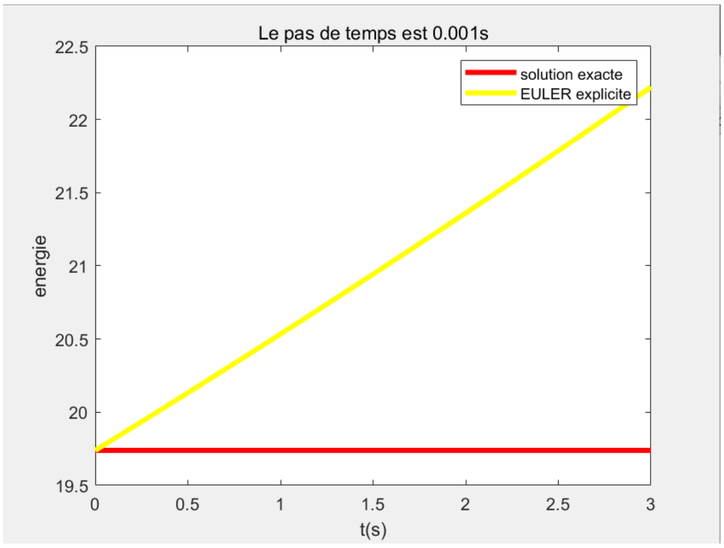


Le premier résultat d'EULER explicite est la solution exacte. Et puis, les résultats d'EULER explicite divergent.

Quand $\Delta t = 0.005s$, la quantité E^* associée au schéma d’EULER explicite est :



Quand $\Delta t = 0.001s$, la quantité E^* associée au schéma d’EULER explicite est :



Donc, plus le pas de temps est petit, plus la quantité augmente lentement.

2.5 On calcule : $\det(A - \lambda I) = 0$, avec $A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -{\omega_0}^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$

Les valeurs propres de la matrice d'amplification en fonction du pas de temps Δt sont :

$$\lambda_1 = 1 - i\omega_0 \Delta t \qquad \lambda_2 = 1 + i\omega_0 \Delta t$$

$|\lambda| = \sqrt{1 + {\omega_0}^2 \Delta t^2} > 1$, la solution est instable.

3.1 a) méthode 1 –Euler implicite sans matrice d'amplification

Code en Matlab

```
dt2=0.001;T0=3;
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;w0c=w0*w0;
t2=(0:dt2:T0)'
np2=size(t2,1);
q2=zeros(np2,1);
dq2=zeros(np2,1);
ddq2=zeros(np2,1);
energie2=zeros(np2,1);
q2(1)=q0;dq2(1)=dq0;
%Euler Implicite
%sans matrice d'amplification
for inc=2:np2
    q2(inc)=(q2(inc-1)+dt2*dq2(inc-1))/(1+w0c*dt2*dt2);
    ddq2=-w0c*q2(inc);
    dq2(inc)=dq2(inc-1)+dt2*ddq2;
end;
energie2=0.5*(dq2.*dq2+w0c*(q2.^2))
plot(t2,q2,'b-','Linewidth',3)
```

b) méthode 2 –Euler implicite avec matrice d'amplification

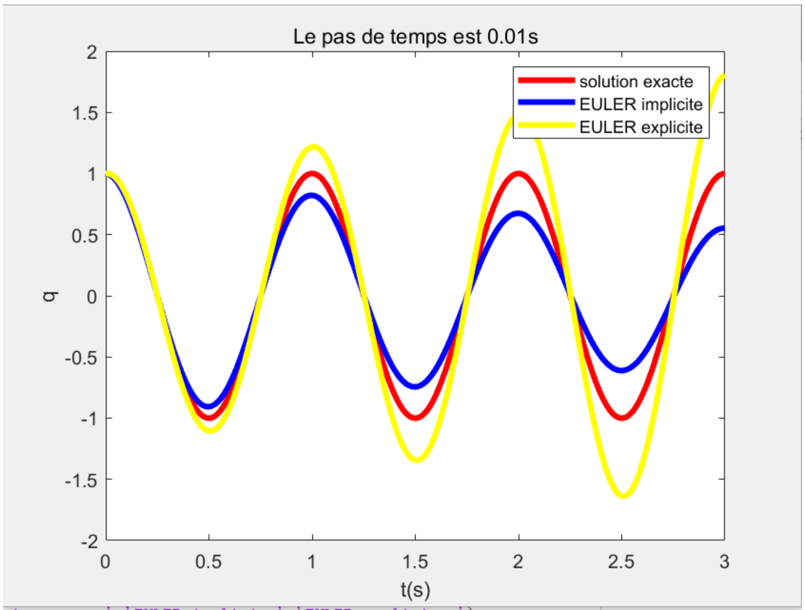
```
dt2=0.01;T0=3;
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;w0c=w0*w0;
t2=(0:dt2:T0)';
np2=size(t2,1);
energie2=zeros(np2,1);
q=[q0;dq0];
q2b=zeros(np2,1);
dq2b=zeros(np2,1);
dq2b(1)=dq0
q2b(1)=q0
A=[1,dt2;-w0c*dt2,1]
A=A/(1+w0c*dt2*dt2)
%Euler Implicite
%avec matrice d'amplification
for inc=2:np2
    q=A*q
    q2b(inc)=q(1)
    dq2b(inc)=q(2)
end;
plot(t2,q2b,'b-','Linewidth',3);
energie2=0.5*(dq2b.*dq2b+w0c*(q2b.^2))
```

3.2 Code en Matlab :

```
%Euler Implicite
%sans matrice d'amplification
dt2=0.01;T0=3;
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;w0c=w0*w0;
t2=(0:dt2:T0)'
np2=size(t2,1);
q2=zeros(np2,1);
dq2=zeros(np2,1);
ddq2=zeros(np2,1);
energie2=zeros(np2,1);
q2(1)=q0;dq2(1)=dq0;
for inc=2:np2
    q2(inc)=(q2(inc-1)+dt2*dq2(inc-1))/(1+w0c*dt2*dt2);
    ddq2=-w0c*q2(inc);
    dq2(inc)=dq2(inc-1)+dt2*ddq2;
end;
energie2=0.5*(dq2.*dq2+w0c*(q2.^2))


%Euler Explicite
%sans matrice d'amplification
dt1=0.01;T0=3;
t1=(0:dt1:T0)'
np1=size(t1,1);
q1=zeros(np1,1);
dq1=zeros(np1,1);
ddq1=zeros(np1,1);
energie1=zeros(np1,1);
q1(1)=q0;dq1(1)=dq0;
ddq1(1)=-w0c*q1(1);
for inc=2:np1
    q1(inc)=q1(inc-1)+dt1*dq1(inc-1);
    dq1(inc)=dq1(inc-1)+dt1*ddq1(inc-1);
    ddq1(inc)=-w0c*q1(inc)
end;
energie1=0.5*(dq1.*dq1+w0c*(q1.^2))

%Solution exacte
dte=0.005
te=(0:dte:T0)';
npe=size(te,1);
```

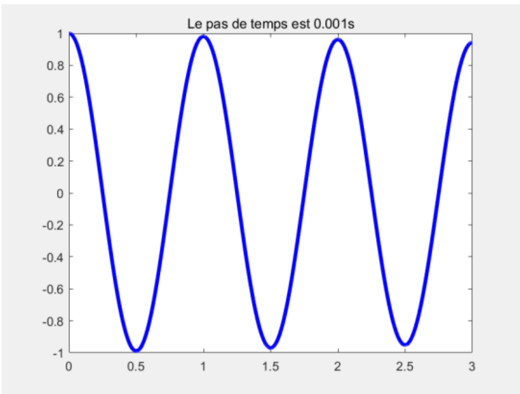
```
qe=zeros(npe,1);
dqe=zeros(npe,1);
energie=zeros(npe,1);
tic;
qe=q0*cos(w0*te)+dq0/w0*sin(w0*te);
dqe=-w0*q0*sin(w0*te)+dq0*cos(w0*te);
ddqe=-w0c*qe;
energie=0.5*(dqe.*dqe+w0c.*(qe.^2))
toc;

plot(te,qe,'r-','Linewidth',3)
hold on
plot(t2,q2,'b','Linewidth',3)
hold on
plot(t1,q1,'y','Linewidth',3)
hold on
legend('solution exacte','EULER implicite','EULER explicite ')
xlabel('t(s)')
ylabel('q')
```

On obtient :

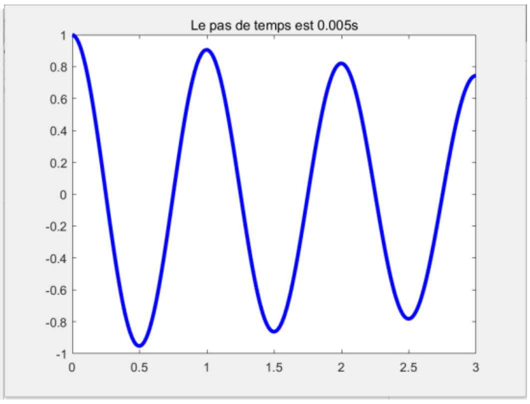


On peut voir que les résultats d'Euler explicite divergent et les résultats d'Euler implicite convergent.

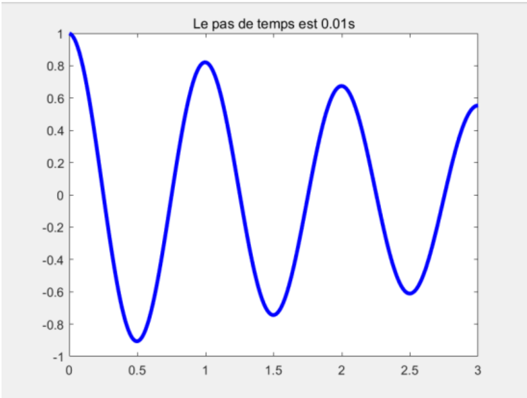
3.3 Nous utilisons la première méthode d'Euler implicite pour analyser l'effet de différents pas de temps sur la solution.



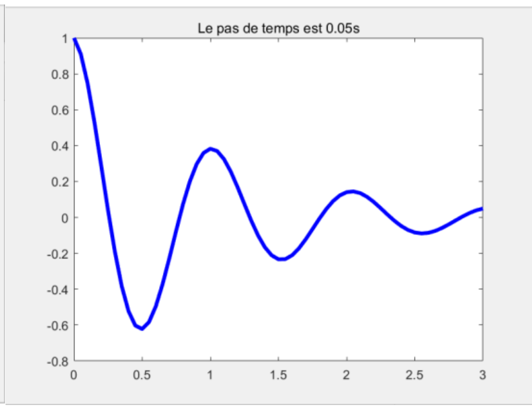
$\Delta t = 0.001s$



$\Delta t = 0.005s$



$\Delta t = 0.01s$



$\Delta t = 0.05s$

En testant différents pas de temps, on peut voir que le schéma d'intégration d'EULER implicite introduit un amortissement numérique. Et plus le pas de temps Δt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

3.4 Nous utilisons la première méthode d'Euler implicite et d'Euler explicite pour comparer la quantité E^*.

Quand $\Delta t = 0.01s$, la quantité E^* de la solution exacte est : $E^* = 19.7392$

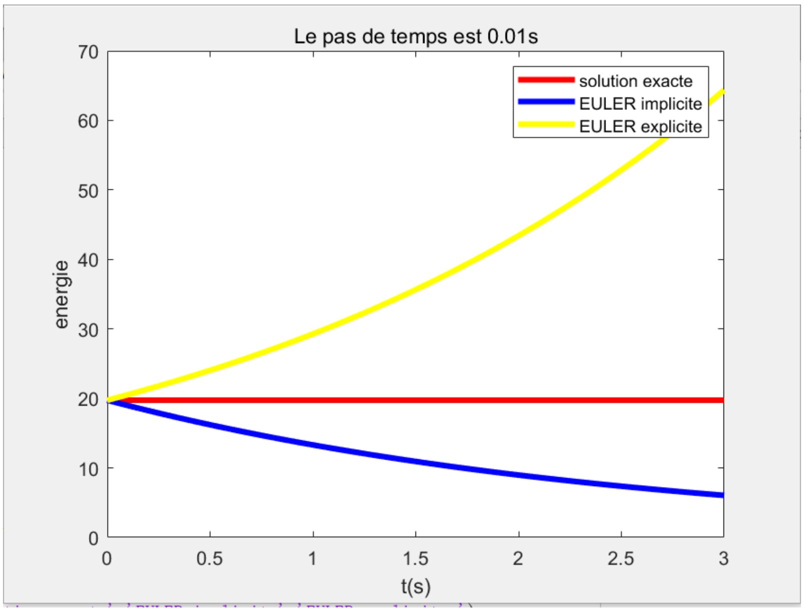
Quand $\Delta t = 0.01s$, la quantité E^* associée au schéma d'EULER explicite est :

19.7392 19.8171 19.8954 19.9739 20.0528 20.1319 20.2114 20.2912 20.3713 20.4517
20.5325 20.6135 20.6949 20.7766 20.8586 20.9410 21.0237 21.1066 21.1900 21.2736
21.3576 21.4419 21.5266 21.6116 21.6969 21.7825 21.8685 21.9549 22.0415 22.1286
22.2159 22.3036 22.3917 22.4801 22.5688 22.6579 22.7474 22.8372 22.9273 23.0178
…
62.1262 62.3714 62.6177 62.8649 63.1130 63.3622 63.6123 63.8635 64.1156 64.3687

Quand $\Delta t = 0.01s$, la quantité E^* associée au schéma d'EULER implicite est :

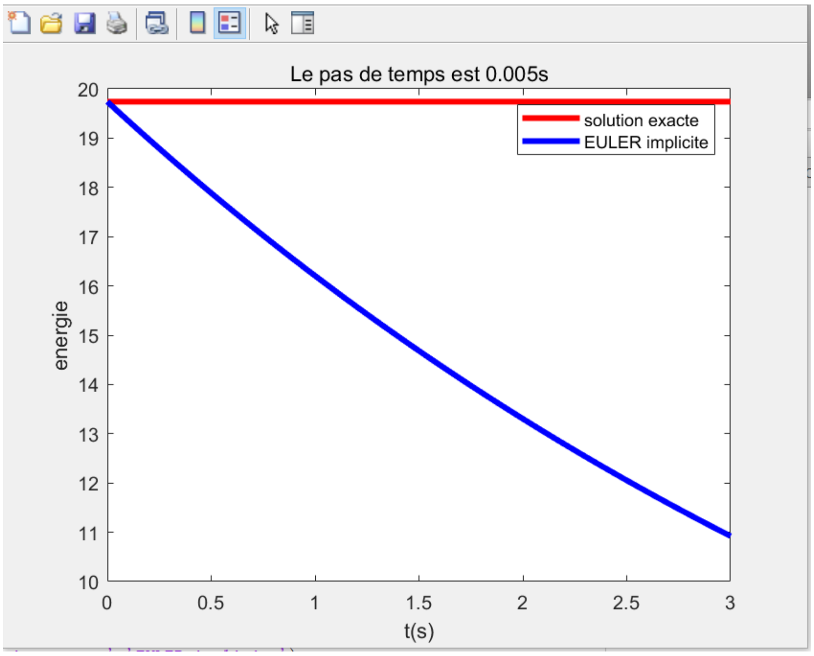
19.7392 19.6616 19.5843 19.5073 19.4306 19.3541 19.2780 19.2022 19.1267 19.0515
18.9766 18.9020 18.8276 18.7536 18.6799 18.6064 18.5332 18.4604 18.3878 18.3155
18.2434 18.1717 18.1002 18.0291 17.9582 17.8876 17.8172 17.7472 17.6774 17.6079
17.5386 17.4696 17.4009 17.3325 17.2644 17.1965 17.1289 17.0615 16.9944 16.9276
…
6.2717 6.2470 6.2225 6.1980 6.1736 6.1494 6.1252 6.1011 6.0771 6.0532

La figure pour comparer ces trois résultats est :

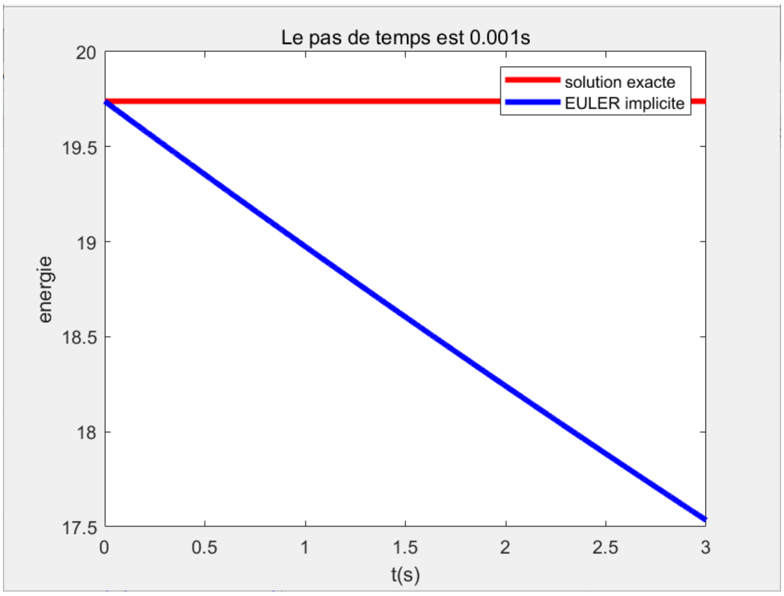


Donc, le premier résultat d'EULER explicite et d'EULER implicite est la solution exacte. Les résultats d'Euler explicites augmentent et les résultats d'Euler implicites diminuent.

Quand $\Delta t = 0.005s$, la quantité E^* associée au schéma d'EULER explicite est :



Quand $\Delta t = 0.001s$, la quantité E^* associée au schéma d'EULER explicite est :



Plus le pas de temps est petit, plus la quantité diminue lentement.

3.5 On calcule : $\det(A - \lambda I) = 0$, avec $A = \frac{1}{1+\omega_0{}^2\Delta t^2}\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0{}^2\Delta t^2 & 1 \end{bmatrix}$

On obtient que Les valeurs propres de la matrice d'amplification en fonction du pas de temps Δt sont :

$$\lambda_1 = \frac{1-i\omega_0\Delta t}{1+\omega_0{}^2\Delta t^2} \qquad \lambda_2 = \frac{1+i\omega_0\Delta t}{1+\omega_0{}^2\Delta t^2}$$

$|\lambda| = \frac{\sqrt{1+\omega_0{}^2\Delta t^2}}{1+\omega_0{}^2\Delta t^2} < 1$, le schéma est inconditionnellement stable.

4.1 D'après l' équation 1 : $\ddot{q} = -w0^2 * q$

On choisit : $\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = \dot{q} = \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 = \ddot{q} = \ddot{x}_1 = -w0^2 * q = -w0^2 * x_1 \end{cases}$

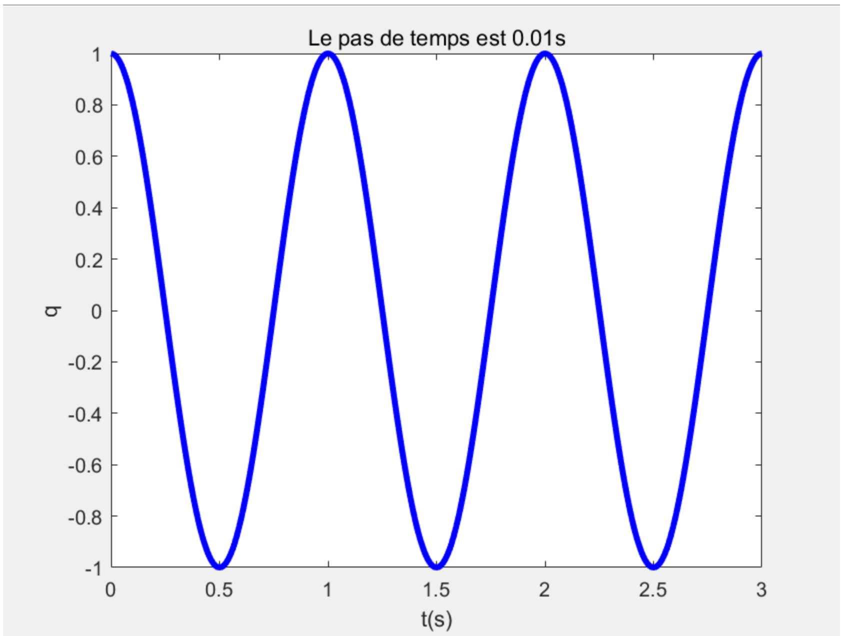
C'est-à-dire : $\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 = -w0^2 * x_1 \end{cases}$

4.2 Code en Matlab :

```
function dq= cal_fc(q,tc)
w0=2*pi;
w0c=w0*w0;
dq=zeros(2,1);
dq(1)=q(2);
dq(2)=-w0c*q(1);
end
dt4=0.01 ;T0=3 ;
t4=(0:dt4:T0)'
np4=size(t4,1)
q0=1;
dq0=0;
q4=zeros(np4,1)
dq4=zeros(np4,1)
q4(1)=q0
dq4(1)=dq0
qj=[q0;dq0]
for inc=2:np4
    tc=t4(inc-1);
    xc=qj;
    k1=cal_fc(xc,tc);
    xc=qj+k1*dt4/2;
    k2=cal_fc(xc,tc+dt4/2);
    xc=qj+k2*dt4/2;
    k3=cal_fc(xc,tc + dt4/2);
    xc=qj + k3 * dt4;
    k4=cal_fc(xc,tc + dt4);
    dq=(k1 + 2 *k2 + 2 * k3 + k4)/6;
    qj=qj + dq * dt4;
    q4(inc)= qj(1);
    dq4(inc)=qj(2);
end
plot(t4,q4,'b-','Linewidth',3);
xlabel('t(s)')
```

```
ylabel('q')
title('Le pas de temps est 0.01s')
```

Et on obtient:



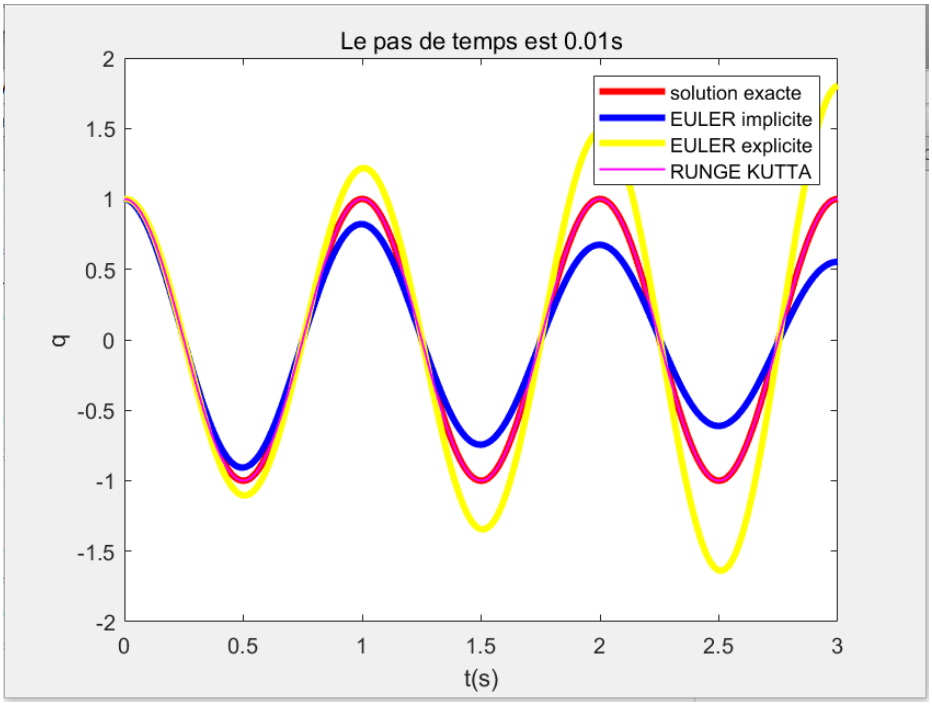
4.3 Code en Matlab :

```
%Euler Implicite
%sans matrice d'amplification
dt2=0.01;T0=3;
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;w0c=w0*w0;
t2=(0:dt2:T0)'
np2=size(t2,1);
q2=zeros(np2,1);
dq2=zeros(np2,1);
ddq2=zeros(np2,1);
energie2=zeros(np2,1);
q2(1)=q0;dq2(1)=dq0;
for inc=2:np2
    q2(inc)=(q2(inc-1)+dt2*dq2(inc-1))/(1+w0c*dt2*dt2);
    ddq2=-w0c*q2(inc);
    dq2(inc)=dq2(inc-1)+dt2*ddq2;
end;
energie2=0.5*(dq2.*dq2+w0c*(q2.^2))


%Euler Explicite
%sans matrice d'amplification
```

```
dt1=0.01;T0=3;
t1=(0:dt1:T0)'
np1=size(t1,1);
q1=zeros(np1,1);
dq1=zeros(np1,1);
ddq1=zeros(np1,1);
energie1=zeros(np1,1);
q1(1)=q0;dq1(1)=dq0;
ddq1(1)=-w0c*q1(1);
for inc=2:np1
    q1(inc)=q1(inc-1)+dt1*dq1(inc-1);
    dq1(inc)=dq1(inc-1)+dt1*ddq1(inc-1);
    ddq1(inc)=-w0c*q1(inc)
end;
energie1=0.5*(dq1.*dq1+w0c*(q1.^2))

%Solution exacte
dte=0.001
te=(0:dte:T0)';
npe=size(te,1);
qe=zeros(npe,1);
dqe=zeros(npe,1);
energie=zeros(npe,1);
tic;
qe=q0*cos(w0*te)+dq0/w0*sin(w0*te);
dqe=-w0*q0*sin(w0*te)+dq0*cos(w0*te);
ddqe=-w0c*qe;
energie=0.5*(dqe.*dqe+w0c.*(qe.^2))
toc;


%RUNGE KUTTA
dt4=0.01;T0=3;
t4=(0:dt4:T0)'
np4=size(t4,1)
q4=zeros(np4,1)
dq4=zeros(np4,1)
q4(1)=q0
dq4(1)=dq0
qj=[q0;dq0]
for inc=2:np4
    tc=t4(inc-1);
    xc=qj;
    k1=cal_fc(xc,tc);
```

```
        xc=qj+k1*dt4/2;
        k2=cal_fc(xc,tc+dt4/2);
        xc=qj+k2*dt4/2;
        k3=cal_fc(xc,tc + dt4/2);
        xc=qj + k3 * dt4;
        k4=cal_fc(xc,tc + dt4);
        dq=(k1 + 2 *k2 + 2 * k3 + k4)/6;
        qj=qj + dq * dt4;
        q4(inc)= qj(1);
        dq4(inc)=qj(2);
end

plot(te,qe,'r-','Linewidth',3)
hold on
plot(t2,q2,'b','Linewidth',3)
hold on
plot(t1,q1,'y','Linewidth',3)
hold on
plot(t4,q4,'m-','Linewidth',1);
hold on
legend('solution exacte','EULER implicite','EULER explicite ','RUNGE KUTTA')
xlabel('t(s)')
ylabel('q')
```

Et on obtient :



On peut voir que lorsque le pas de temps est de 0,01 s, le résultat de Runge Kuta est plus proche de la solution exacte que l'Euler explicite et l'Euler implicite (pour mieux afficher les résultats, on choisit que 'LineWidth' de la valeur exacte est 3 et 'LineWidth' de Runge Kuta est 1).

4.4 Quand $\Delta t = 0.01s$, la quantité E^* de la solution exacte est : $E^* = 19.7392$

Quand $\Delta t = 0.01s$, la quantité E^* associée au schéma d'EULER explicite est :

19.7392 19.8171 19.8954 19.9739 20.0528 20.1319 20.2114 20.2912 20.3713 20.4517
20.5325 20.6135 20.6949 20.7766 20.8586 20.9410 21.0237 21.1066 21.1900 21.2736
21.3576 21.4419 21.5266 21.6116 21.6969 21.7825 21.8685 21.9549 22.0415 22.1286
22.2159 22.3036 22.3917 22.4801 22.5688 22.6579 22.7474 22.8372 22.9273 23.0178
…
62.1262 62.3714 62.6177 62.8649 63.1130 63.3622 63.6123 63.8635 64.1156 64.3687

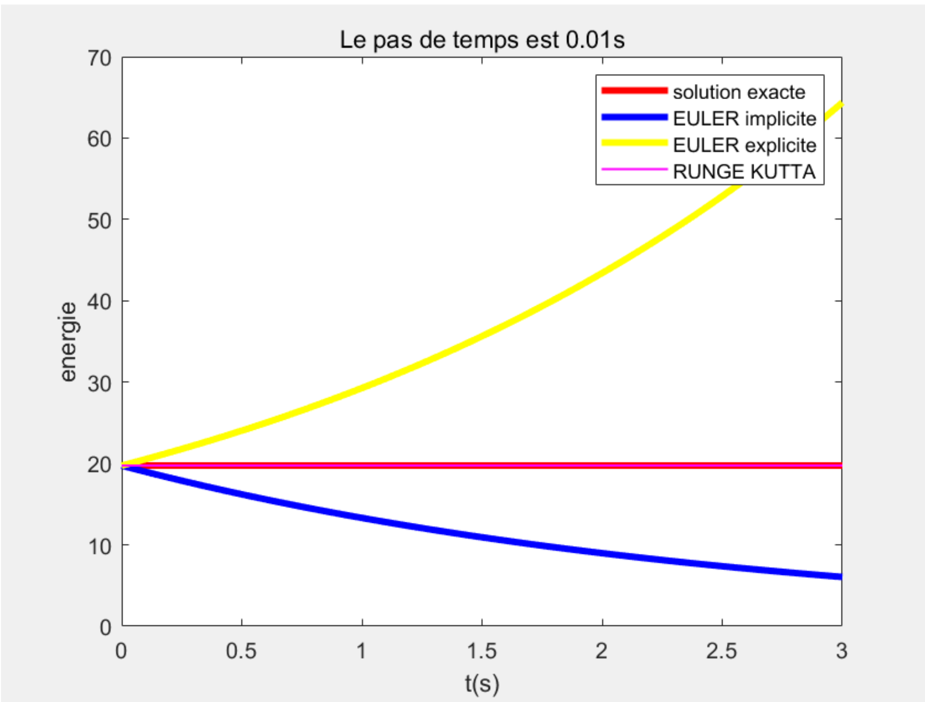
Quand $\Delta t = 0.01s$, la quantité E^* associée au schéma d'EULER implicite est :

19.7392 19.6616 19.5843 19.5073 19.4306 19.3541 19.2780 19.2022 19.1267 19.0515
18.9766 18.9020 18.8276 18.7536 18.6799 18.6064 18.5332 18.4604 18.3878 18.3155
18.2434 18.1717 18.1002 18.0291 17.9582 17.8876 17.8172 17.7472 17.6774 17.6079
17.5386 17.4696 17.4009 17.3325 17.2644 17.1965 17.1289 17.0615 16.9944 16.9276
…
6.2717 6.2470 6.2225 6.1980 6.1736 6.1494 6.1252 6.1011 6.0771 6.0532

Quand $\Delta t = 0.01s$, la quantité E^* associée au schéma de Runge Kuta est :

19.739208802178716 19.739208785318539 19.739208768458361
19.739208751598191 19.739208734738014 19.739208717877833
19.739208701017660 19.739208684157486 19.739208667297312
19.739208650437142 19.739208633576965 19.739208616716788
…
19.739203777847141 19.739203760986967 19.739203744126797

La figure pour comparer ces quatre résultats est :



On peut voir que lorsque le pas de temps est de 0,01 s, le résultat de Runge Kuta est plus proche de la solution exacte que l'Euler explicite et l'Euler implicite (pour mieux afficher les résultats, on choisit que ‘LineWidth’ de la valeur exacte est 3 et ‘LineWidth’ de Runge Kuta est 1).

Donc, on peut choisir le schéma de Runge Kuta pour résoudre l’ équation (1).