Mécanique Numérique DM2

2.1 Démonstration d'Euler explicite avec matrice d'amplification.

Démonstration d'Euler explicite avec matrice d'amplification.

D'abord, on a la discretisation du temps

$t_0, \dots t_i, \dots t_N$,

$\forall i \in [0, N-1]$, $t_{i+1} - t_i = \Delta t \ll 1$

Ici, on note $\begin{cases} q(t_j) = q_j \\ \dot{q}(t_j) = \dot{q}_j \\ \ddot{q}(t_j) = \ddot{q}_j \end{cases}$

Comme la définition de dérivé et dérivé secondaire, on obtien.

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \cdot \dot{q}_j$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t \cdot \ddot{q}_j$$

De plus, on sais que $\ddot{q}_j + w_0^2 q_i = 0$

$$\ddot{q}_j = -w_0^2 q_j$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t \cdot \dot{q}_j \\ \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j - w_0^2 \Delta t\, q_j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -w_0^2 \Delta t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -w_0^2 \Delta t & 1 \end{pmatrix}$

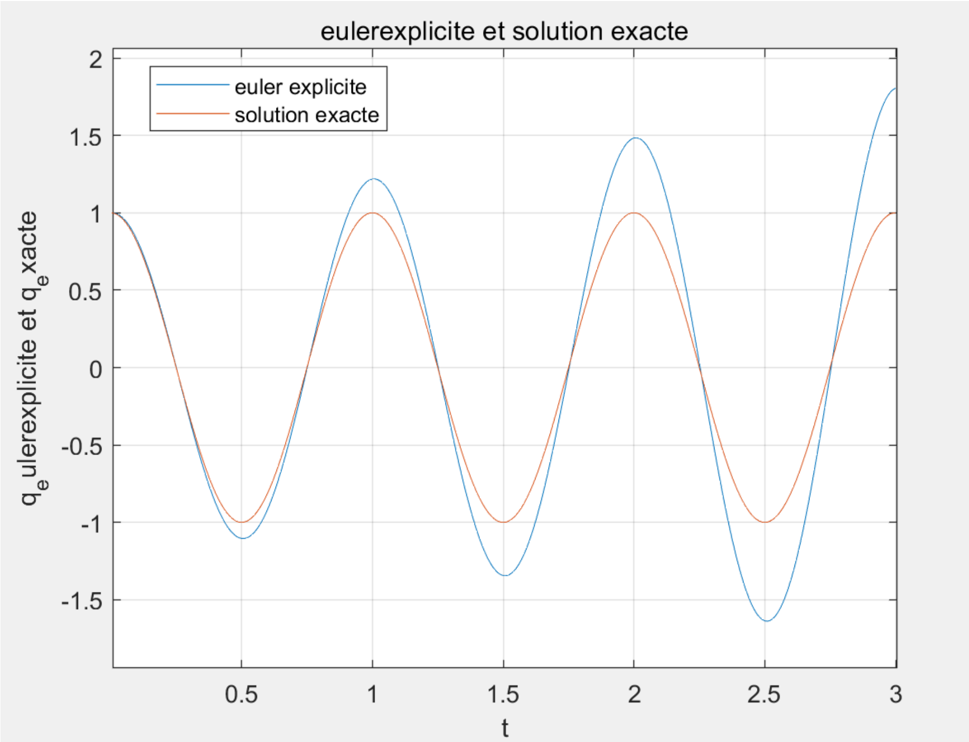
et on a l'équation d'Euler explicte avec matrice d'amplification.

2.2 Programme de la solution du problème à l'aide d'Euler explicite en utilisant la méthode de matrice A

Script Matlab

```
 q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;dt=0.01;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
for i=2:nb
   q=A*q;
   q1b(i)=q(1);
end
plot(t,q1b),hold on
plot(t,cos(2*pi*t))
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q_eulerexplicite et q_exacte');
title('eulerexplicite et solution exacte')
```

On peut avoir le dessin comme ca:



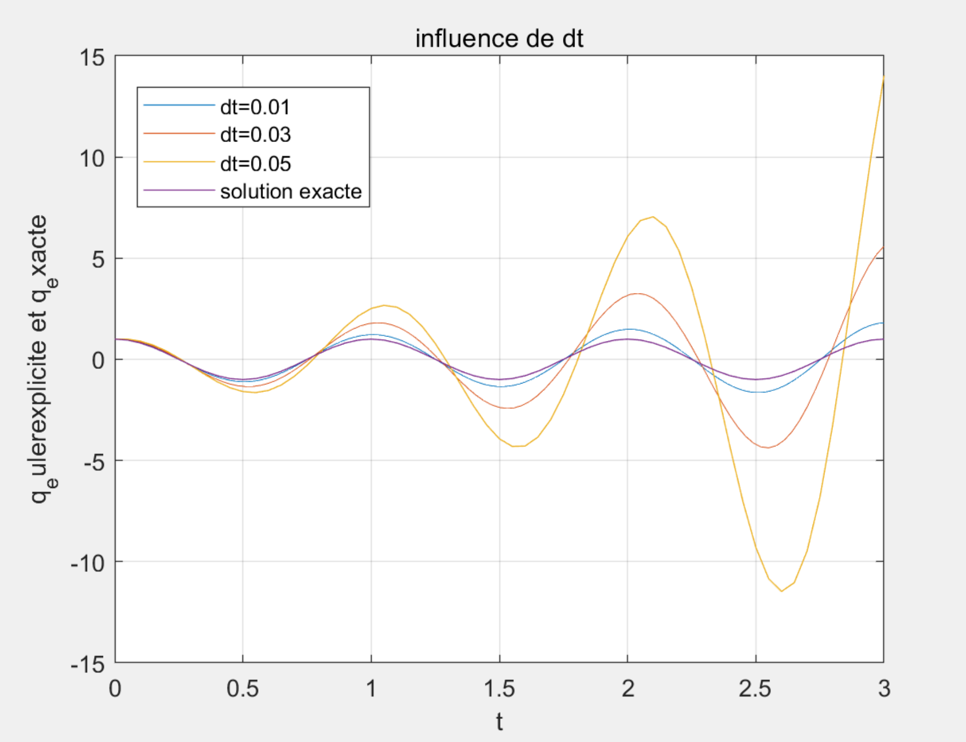
On voit que entre la solution exacte et la solution obtenueen utilisant Euler explicite, il y a un petit différence qui devient de plus en plus grand quand le temps augmente.

2.3 L'influence du pas de temps

On essait 3 pas de temps différents : dt=0.01, 0.03 et 0.05, la programmation en Matlab est comme ca:

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;
for dt=[0.01 0.03 0.05 ]
t=(0:dt:T0)';
   nb=size(t,1);
   q=[q0;dq0];
   q1b=zeros(nb,1);
   q1b(1)=q0;
   A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
   for i=2:nb
      q=A*q;
      q1b(i)=q(1);
   end
   plot(t,q1b),hold on
end
plot(t,cos(2*pi*t))
grid on;
xlabel('t');
ylabel('q_eulerexplicite et q_exacte');
title('influence de dt')
```

On peut voir que la solution numérique obtenue par ce schéma d'intégration est divergente. En comparant les lignes dans le dessin dessous, on voit que le différence devient de plus en plus grand quand le temps augmente.



2.4.1 Calcul du E*(dt=0.01) et Comparaison avec E* exacte

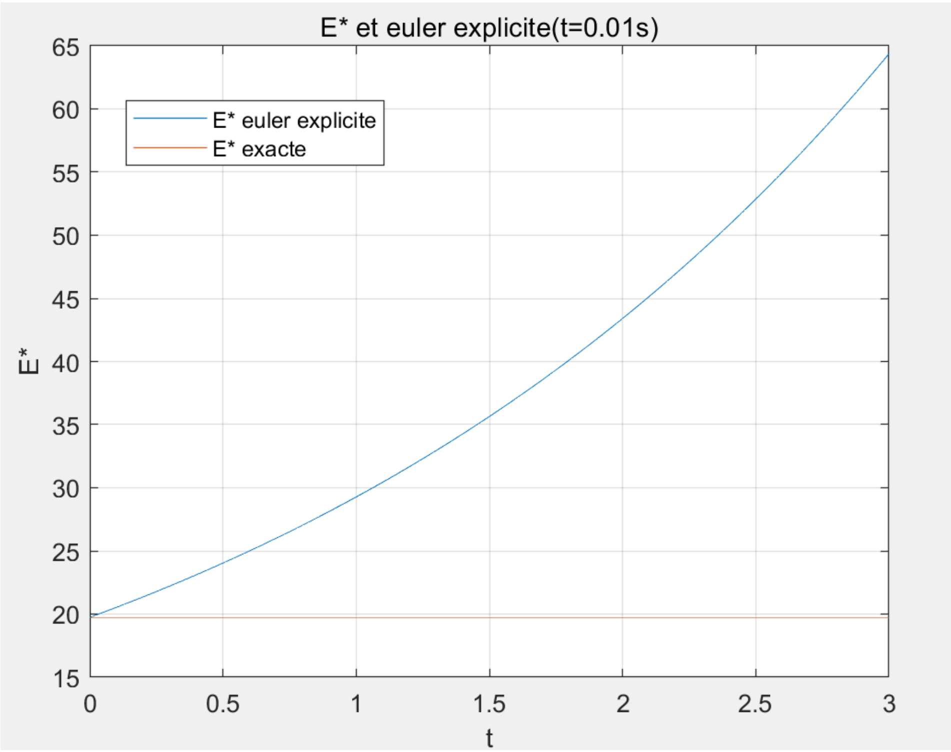
Programmation en Matlab est comme ca :

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;dt=0.01;
t=(0:dt:T0)';
nb=size(t,1);
q=[q0;dq0];
q1b=zeros(nb,1);
dq1b=zeros(nb,1);
E_star_euler_explicite=zeros(nb,1);
q1b(1)=q0;
dq1b(1)=dq0;
E_star_euler_explicite(1)=2*pi*pi;
A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
for i=2:nb
   q=A*q;
   q1b(i)=q(1);
   dq1b(i)=q(2);

E_star_euler_explicite(i)=1/2*(dq1b(i).*dq1b(i)+(2*pi*
q1b(i))^2);
end
```

```
plot(t,E_star_euler_explicite),hold on
plot(t,t*0+2*pi*pi)
grid on;
xlabel('t');
ylabel('E*');
title('E* et euler explicite(t=0.01s)')
```

En obtenant le dessin dessous, on sait que E*(dt=0.01) euler explicite n'est plus un constant,mais en meme temps, E* exacte est un constant, et la différence entre ils devient de plus en plus grand quand le temps progresse. Donc c'est mieux si on choisit un pas de temps(dt) plus petit.



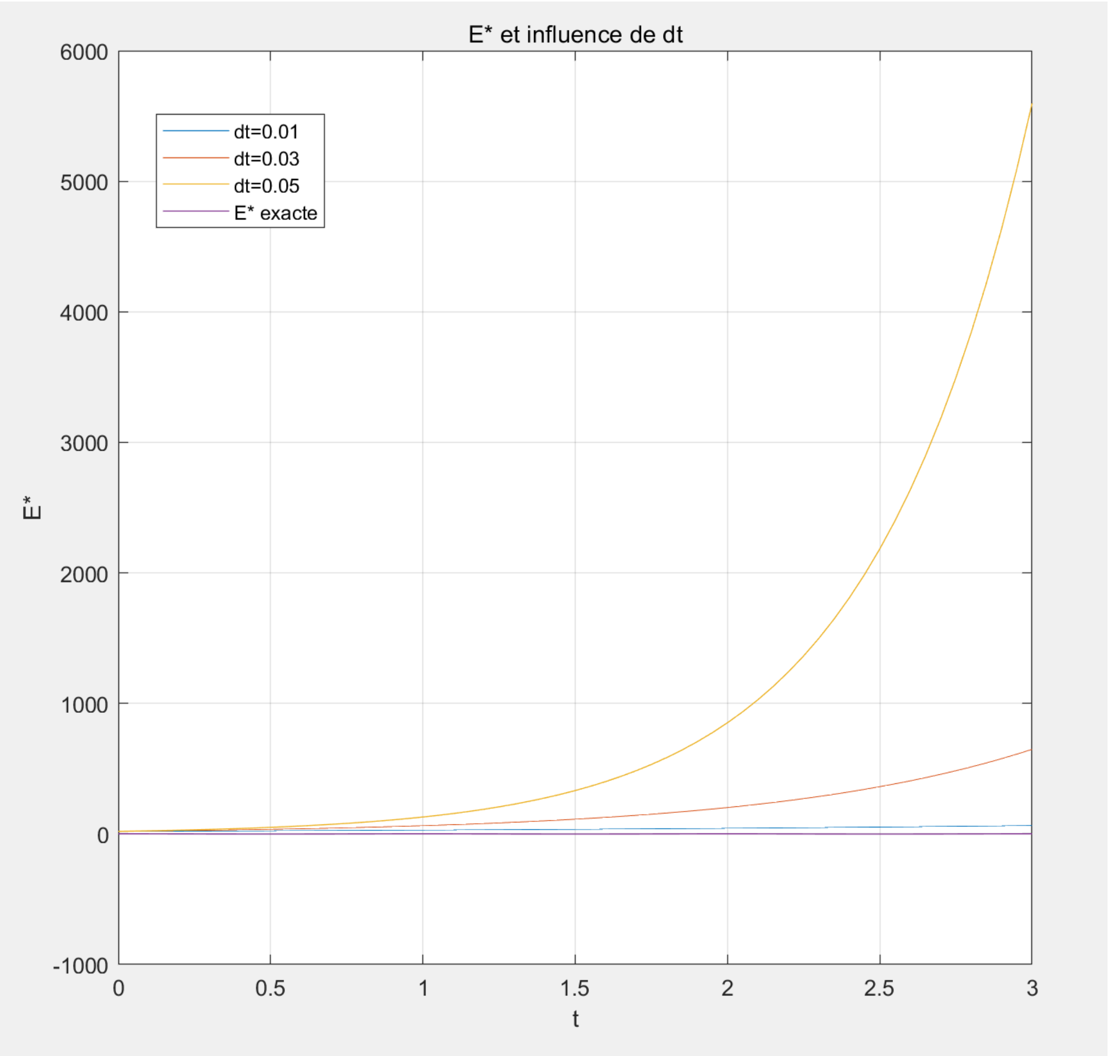
2.4.2 L'influence du dt sur E*

Programmation en Matlab est comme ca :

```
q0=1;dq0=0;w0=2*pi;T0=3;
for dt=[0.01 0.03 0.05]
   t=(0:dt:T0)';
   nb=size(t,1);
   q=[q0;dq0];
   q1b=zeros(nb,1);
   dq1b=zeros(nb,1);
   E_star_euler_explicite=zeros(nb,1);
   q1b(1)=q0;
   dq1b(1)=dq0;
   E_star_euler_explicite(1)=2*pi*pi;
   A=[1,dt;-(w0*w0)*dt 1];
   for i=2:nb
```

```
        q=A*q;
        q1b(i)=q(1);
        dq1b(i)=q(2);
        E_star_euler_explicite(i)=1/2*(dq1b(i).*dq1b(i)+
        (2*pi*q1b(i))^2);
    end
plot(t,E_star_euler_explicite),hold on
end
plot(t,t*0+2*pi*pi)
grid on;
xlabel('t');
ylabel('E*');
title('E* et influence de dt')
```

On obtient le dessin qui indique E* euler explicite augmente très vite en fonction du dt. Donc c'est mieux si on choisit un pas de temps(dt) plus petit.



2.5 Les valeurs propres de matrice d'amplification

Calcul les valeurs propres de A :

```
syms dt
A=[1,dt;-(2*pi)*(2*pi)*dt 1]
A=vpa(A,3)
[z,d]=eig(A)
z=vpa(z,3)
d=vpa(d,3)
mo=vpa(abs(d),3)
```

On a donc les valeurs propres:

d =[1.0-dt*6.28i,0]

[0,1.0+dt*6.28i]

et abs(d)=racine(1^2+(6.28*dt)^2) absolument plus grand que 1.

$[Z, d] = eig(A)$

$A = Z \times d \times inv(Z)$

$q_{j+1} = A\, q_j$

$q_{j+k} = A^k\, q_j$

$\quad = Z \times d^k \times inv(Z)$

$abs(d) > 1$ donc d^k est divergent

Donc la solution obtenue par Euler Explicite est inconditionnellement divergente.