DM 1

Nom et prénom: Maël - Ji Zhenhua

Numéro d'étudiant: SY1924113

L'équation du mouvement du pendule simple avec les équations de Lagrange

L'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$,

L'énergie potentielle $V = -mgl\cos\theta$,

Lagrangien $L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$.

D'après l'équation de Lagrange, on peut obtenir:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

Quand θ est très petit, $\sin\theta$ tend vers θ. Et donc,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Exercice 1: Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

1. Solution analytique de l'équation

1.1 On utilise Matlab pour obtenir la solution analytique, les codes sont les suivantes.

```
>> q = dsolve('D2q + (omega0 ^ 2)*q = 0','q(0)=1','Dq(0)=0');
```

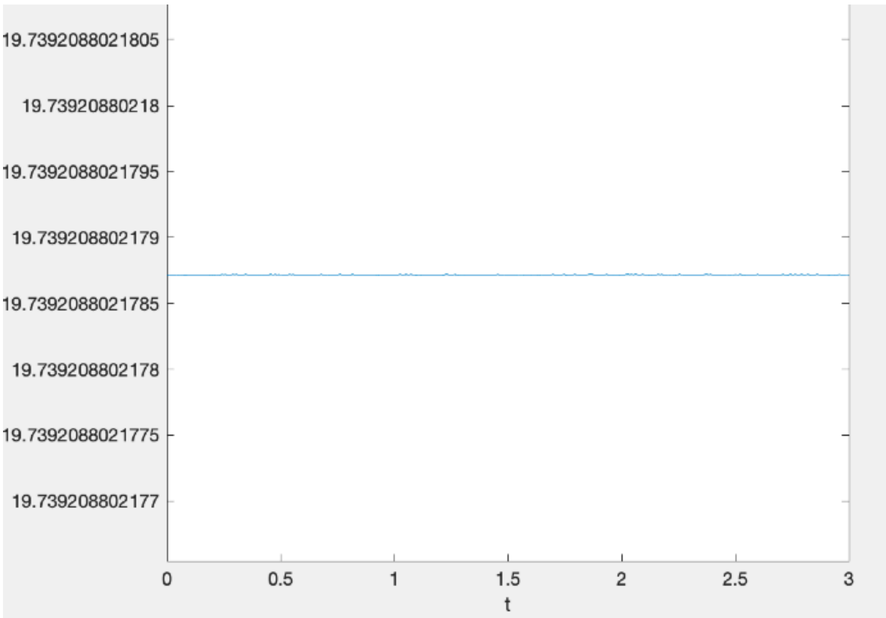
Et donc la solution analytique est comme la suivante.

```
>> q = cos(omega0 * t);
```

1.2 Calculer numériquement $E^* = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2)$.

```
>> syms t;
>> omega0 = 2 * pi;
>> T0 = 3;
>> q = cos(omega0 * t);
>> dq = diff(q, t);
>> E = 0.5 * (dq^2 + omega0^2 * q^2);
>> ezplot(E)
```

Et on a obtenu le graphique de E^*, comme le suivant:



En fait, en calculant E^*, on peut obtenir simplement $E^* = \dfrac{1}{2}\omega_0^2$. Et donc c'est une constante.

2. EULER explicite

2.1 On part de la relation (5), et on obtient la relation suivante:

$$\left|\begin{matrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{matrix}\right. + \Delta t \times \left|\begin{matrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{matrix}\right.$$

$$= \left|\begin{matrix} q_j + \Delta t \times \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t \times \ddot{q}_j \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} q_j + \Delta t \times \dot{q}_j \\ \dot{q}_j + \Delta t \times (-\omega_0^2 q_j) \end{matrix}\right.$$

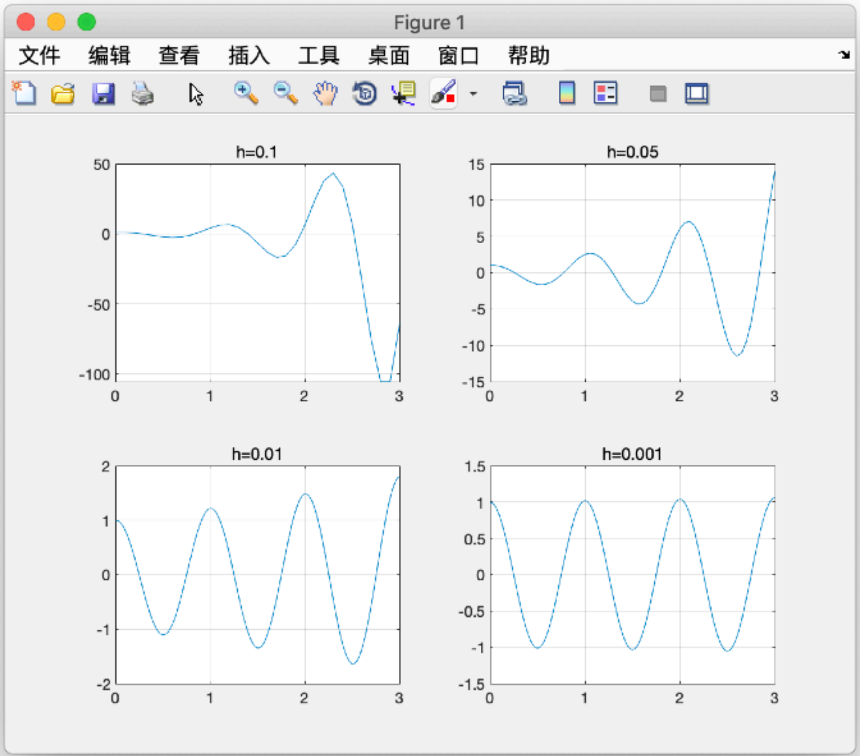
$$= \left|\begin{matrix} q_j + \Delta t \times \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 \Delta t \times q_j + \dot{q}_j \end{matrix}\right. = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \left|\begin{matrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{matrix}\right.$$

2.2 Programmation sur Matlab

eulerEx.m

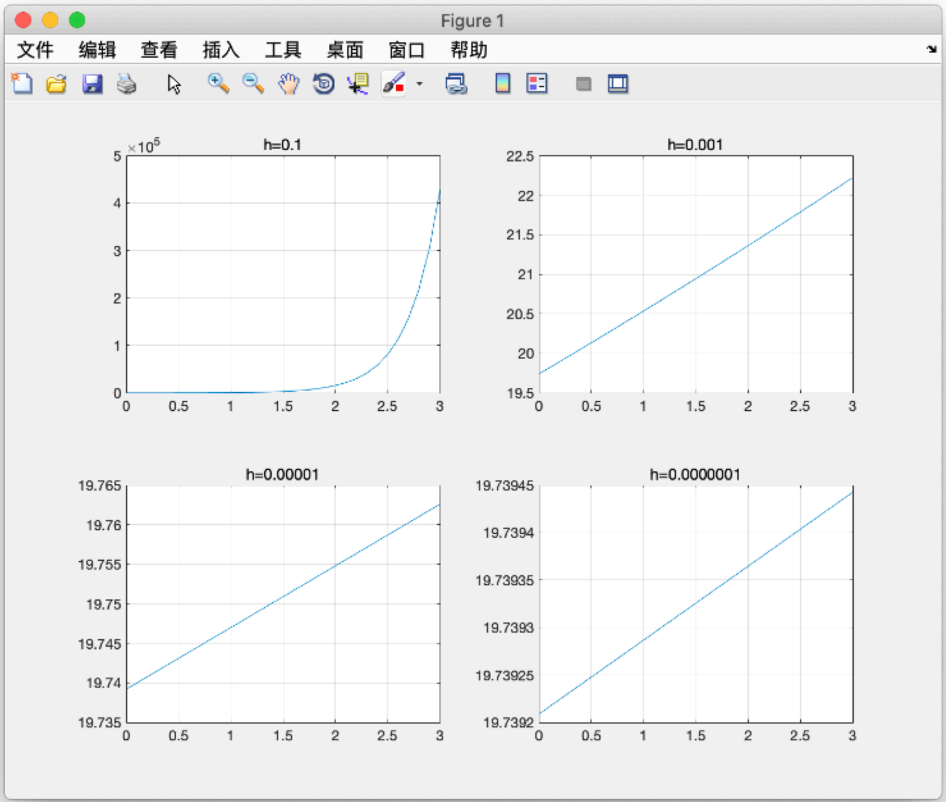
```
omega0 = 2 * pi;
T0 = 3;
h = 0.001;

x = 0:h:T0;
y(1) = 1;
dy(1) = 0;

for n = 1:length(x) - 1
    dy(n+1) = dy(n) + h * (- omega0^2 * y(n));
    y(n+1) = y(n) + h * dy(n);
end

t = x';
q = y';

plot(t,q)
```

2.3 On a testé de différents pas de temps h, et on a obtenu le graphique suivant:



Dans ce graphique, on peut voir que la solution numérique obtenue est divergente. Cependant, plus le pas de temps h est petit, plus la divergence est lente.

2.4 De même, on a testé de différents pas de temps h pour calculer la quantité E^*, et on peut trouver le résultat comme le suivant:



Dans ce graphique, on peut voir que la quantité E^* est aussi divergente. De plus, on peut remarquer que plus le pas de temps h est petit, plus la divergence est lente.

2.5 Les valeurs propres de la matrice d'amplification.

La matrice d'amplification s'écrit $A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$, on peut trouver facilement les 2 valeurs propres de cette matrice, qui sont $\lambda = 1 \pm \omega_0 \Delta t \cdot i$. C'est 2 complexes conjuguées. Le module de ces 2 valeurs propres est supérieur à 1, les erreurs numériques se propagent, ce qui explique l'instabilité du schéma d'EULER explicite.

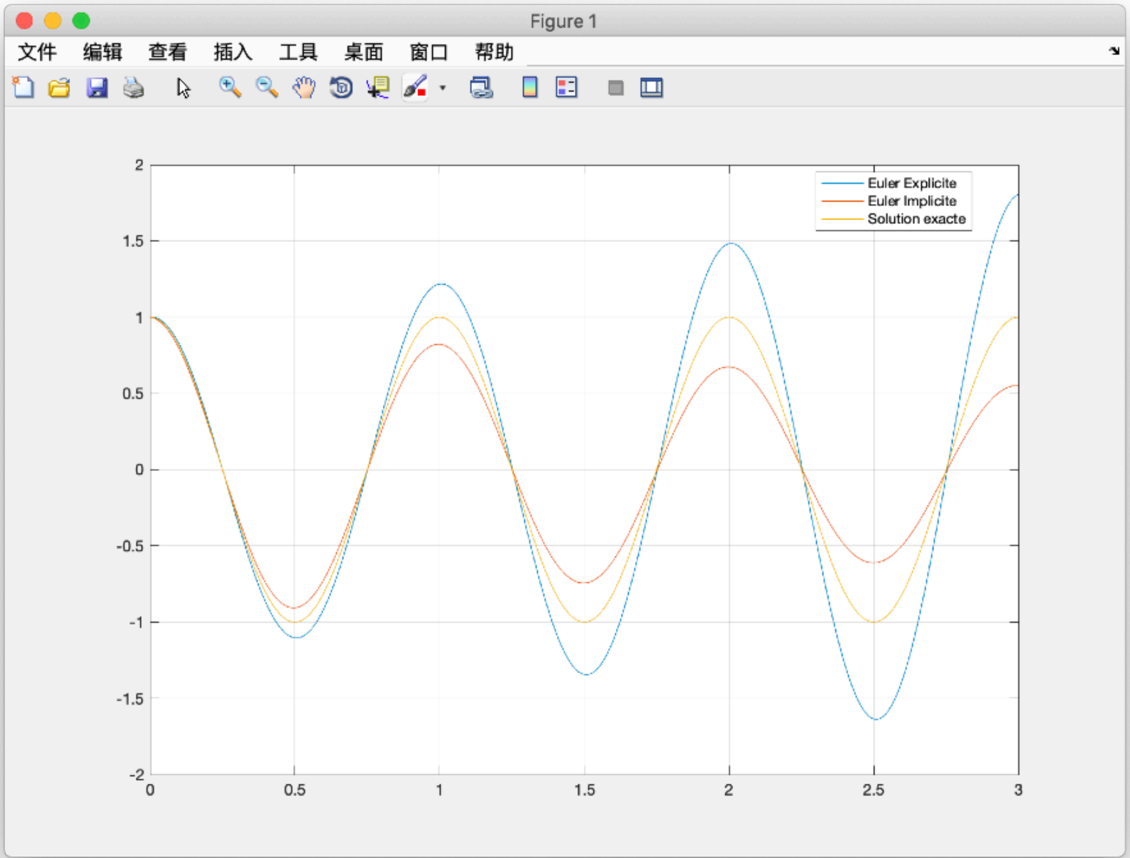
3. EULER implicite

3.1 Programmation sur Matlab

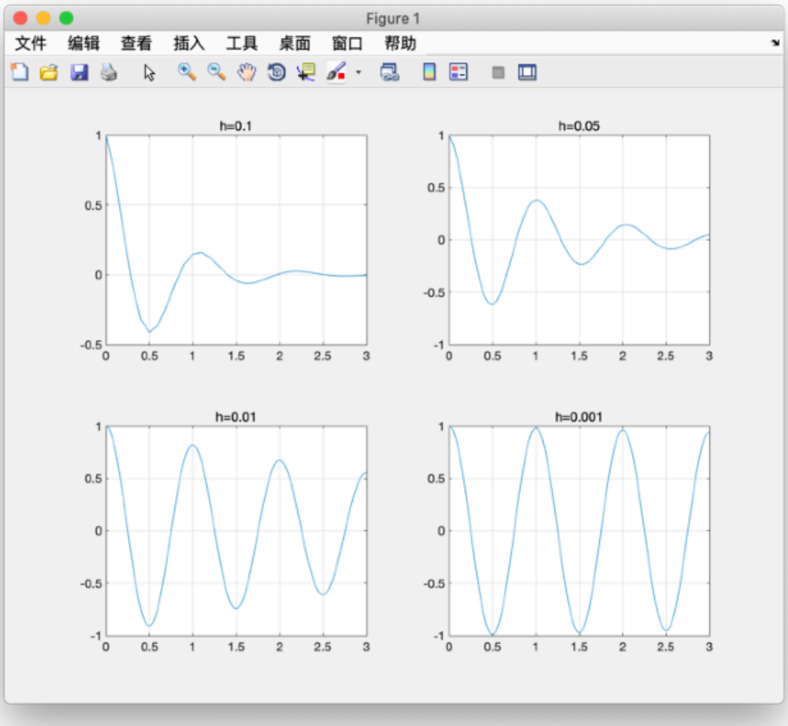
eulerIm.m

```
omega0 = 2 * pi;
T0 = 3;
h = 0.0001;

x = 0:h:T0;
y(1) = 1;
dy(1) = 0;

for n = 2:length(x)
    y(n) = (y(n-1) + h * dy(n-1))/(1 + omega0^2 * h^2);
    dy(n) = dy(n-1) + h * (-omega0^2 * y(n));
end

t = x';
q = y';

plot(t,q)
```

3.2 Dans les 3 situations, on prend le pas de temps $\Delta t = 0.01s$.

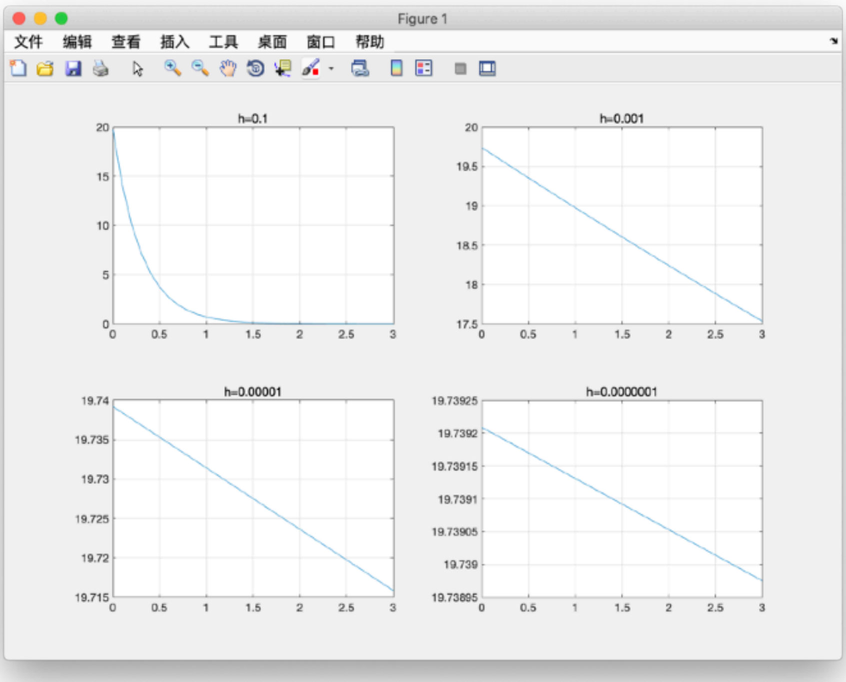


3.3 On a testé de différents pas de temps h, et on a obtenu le graphique suivant:



Dans ce graphique, on peut voir que le schéma introduit un amortissement numérique. Cependant, on peut trouver facilement que plus le pas de temps h est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

3.4 De même, on a testé de différents pas de temps h pour calculer la quantité E^*, et on peut trouver le résultat.



La quantité E^* obtenue par la solution exacte est une constante, et cela obtenue par un schéma d'EULER explicite est une droite croissante, et le résultat obtenu par EULER implicite est une droite décroissante. Et plus le pas est petit, plus la pente de cette droite est petite.

3.5 Les valeurs propres de la matrice d'amplification.

La matrice d'amplification s'écrit $A = \frac{1}{1+\omega_0^2\Delta t^2}\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2\Delta t & 1 \end{bmatrix}$, on peut trouver facilement les 2 valeurs propres de cette matrice, qui sont $\lambda = \frac{1}{1+\omega_0^2\Delta t^2}(1 \pm \omega_0\Delta t \cdot i)$. Le module de ces 2 valeurs propres est inférieur à 1, ce qui explique la stabilité du schéma d'EULER implicite.