DM 4 - partie 1

Nom et prénom: <u>Maël - Ji Zhenhua</u>

Numéro d'étudiant: <u>SY1924113</u>

Exercice 3: Étude d’un double pendule avec l’hypothèse des petits mouvements

1. Newmark Explicite

1.1 Matrice d’amplification

Quand on choisit $\beta = 0$ et $\gamma = 0.5$, on peut obtenir la matrice d’amplification dans Matlab comme le suivant.

```
B = [2,1;1,1];
C = [2,0;0,1];
D = inv(B)*C;
Ide = eye(2);
Zero = zeros(2);

A1 = [Ide,Zero;h*0.5*g/a*D,Ide];
A2 = [Ide-h^2*0.5*g/a*D,h*Ide;-h*0.5*g/a*D,Ide];

A = inv(A1)*A2;
A = simplify(A)
```

```
>> EX3_matrice_amplification

A =

[              1 - (981*h^2)/50,                 (981*h^2)/100,                h,                0]
[                  (981*h^2)/50,              1 - (981*h^2)/50,                0,                h]
[ (981*h*(2943*h^2 - 200))/5000,  -(981*h*(981*h^2 - 50))/2500, 1 - (981*h^2)/50,    (981*h^2)/100]
[  -(981*h*(981*h^2 - 50))/1250, (981*h*(2943*h^2 - 200))/5000,     (981*h^2)/50, 1 - (981*h^2)/50]
```

1.2 Pas de temps critique

On calcule les valeurs propres de la matrice d’amplification, et ensuite on calcule le module de ces valeurs propres.

```
>> EX3_matrice_amplification

mo =

 abs((981*2^(1/2)*h^2)/100 + (981*h^2)/50 + (3*218^(1/2)*abs(h)*(1962*2^(1/2)*h^2 - 100*2^(1/2) + 2943*h^2 - 200)^(1/2))/100 - 1)
 abs((981*2^(1/2)*h^2)/100 + (981*h^2)/50 - (3*218^(1/2)*abs(h)*(1962*2^(1/2)*h^2 - 100*2^(1/2) + 2943*h^2 - 200)^(1/2))/100 - 1)
 abs((981*h^2)/50 - (981*2^(1/2)*h^2)/100 + (3*218^(1/2)*abs(h)*(100*2^(1/2) - 1962*2^(1/2)*h^2 + 2943*h^2 - 200)^(1/2))/100 - 1)
 abs((981*2^(1/2)*h^2)/100 - (981*h^2)/50 + (3*218^(1/2)*abs(h)*(100*2^(1/2) - 1962*2^(1/2)*h^2 + 2943*h^2 - 200)^(1/2))/100 + 1)
```

Quand le module vaut 1, on peut obtenir le pas de temps critique.

1.3 Relation entre $q_0, \quad \dot{q}_0 \quad et \quad \ddot{q}_0$.

À partir de l'équation originale, on prend $t = 0$, et on peut obtenir la relation comme la suivante.

$$\ddot{q}_0 + \frac{g}{a}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} q_0 = 0$$

1.4 Les 3 relations

Pour un schéma de Newmark explicite, les relations entre les variables aux instants t_n et t_{n+1}, quand on prend $\beta = 0$ et $\gamma = 0.5$, s'écrivent comme les suivantes.

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \ddot{q}_n$$

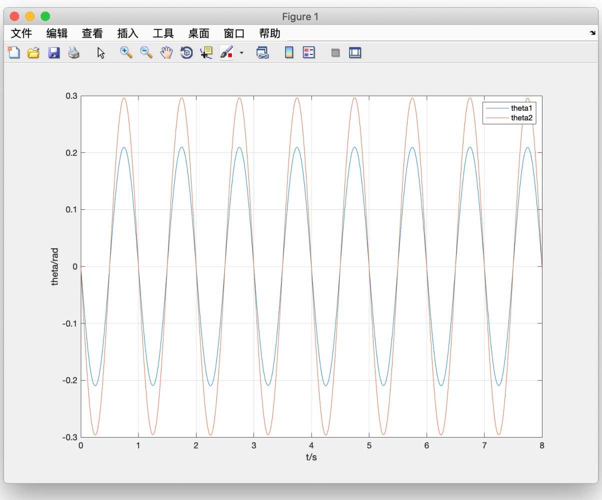
$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{1}{2}\Delta t \ddot{q}_n + \frac{1}{2}\Delta t \ddot{q}_{n+1}$$

Et ensuite, à partir de l'équation du mouvement, on peut obtenir la relation suivante.

$$\ddot{q}_{n+1} = -\frac{g}{a}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} q_{n+1} + \frac{F_0}{ma} \sin \omega t_{n+1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

1.5 Programmation du résolution

```
m = 2;
a = 0.5;
g = 9.81;
F0 = 20;
omega = 2 * pi;
T0 = 8;
D = [2,-1;-2,2];
E = [1,-1;-1,2];
F = [1;1/sqrt(2)];

gamma = 0.5;
beta = 0;

h = 0.001;
t = 0:h:T0;

q(1,1) = 0;
q(2,1) = 0;
dq(1,1) = -1.31519275;
dq(2,1) = -1.85996342;
ddq0(1) = 0;
ddq0(2) = 0;

for n = 2:length(t)
    q(:,n) = q(:,n-1) + h * dq(:,n-1) + 0.5 * h^2 * ddq0(:);
    ddq(:) = -g / a * D * q(:,n) + F0 / (m * a) * sin(omega * t(n)) * E * F;
    dq(:,n) = dq(:,n-1) + 0.5 * h * (ddq0(:) + ddq(:));
    ddq0(:) = ddq(:);
end
```



1.6 Les valeurs numériques

Quand $t = 0$,

$$q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.31519275 \\ -1.85996342 \end{pmatrix}, \quad \ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quand $t = \Delta t$,

$$q(t) = \begin{pmatrix} -0.026303855 \\ -0.0371992684 \end{pmatrix}, \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.304827762917491 \\ -1.845305114750158 \end{pmatrix}, \quad \ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 1.036498708250947 \\ 1.465830524984192 \end{pmatrix}$$

Quand $t = 2\Delta t$,

$$q(t) = \begin{pmatrix} -0.0521931105167 \\ -0.073812204590006 \end{pmatrix}, \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.273896237501174 \\ -1.801561332168207 \end{pmatrix}, \quad \ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 2.056653833380742 \\ 2.908547733210906 \end{pmatrix}$$

Quand $t = 25\Delta t = 0.5s$,

$$q(t) = \begin{pmatrix} -2.988247394554708e-04 \\ -4.226024181761792e-04 \end{pmatrix}, \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} 1.314299175243450 \\ 1.858699716228809 \end{pmatrix}, \quad \ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} 0.003434423331617 \\ 0.004857036113002 \end{pmatrix}$$

2. Newmark Implicite

2.1 Matrice d'amplification

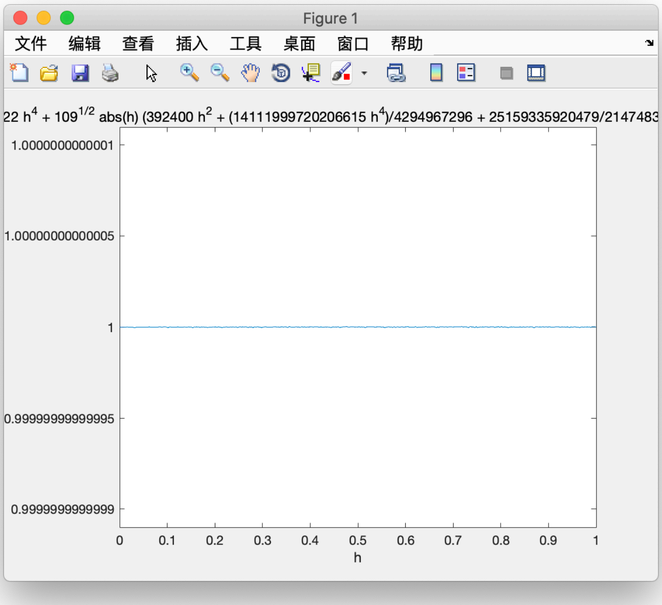
Pour un schéma de Newmark implicite, on prend $\beta = 0.25$ et $\gamma = 0.5$, et on peut obtenir la matrice d'amplification dans Matlab comme la suivante.

```
h = sym('h','real');
g = 9.81;
a = 0.5;

B = [2,1;1,1];
C = [2,0;0,1];
D = inv(B)*C;
Ide = eye(2);
Zero = zeros(2);

A1 = [Ide+0.25*h^2*g/a*D,Zero;h*0.5*g/a*D,Ide];
A2 = [Ide-h^2*0.25*g/a*D,h*Ide;-h*0.5*g/a*D,Ide];

A = inv(A1)*A2;
A = simplify(A)
```

```
>> EX3_matrice_amplification_im

A =

[     -(962361*h^4 - 20000)/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000),              (196200*h^2)/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000), (200*h*(981*h^2 + 100))/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000),              (98100*h^3)/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000)]
[              (392400*h^2)/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000),     -(962361*h^4 - 20000)/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000),             (196200*h^3)/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000), (200*h*(981*h^2 + 100))/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000)]
[ -(3924*h*(981*h^2 + 200))/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000),                (392400*h)/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000),   -(962361*h^4 - 20000)/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000),             (196200*h^2)/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000)]
[                (784800*h)/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000), -(3924*h*(981*h^2 + 200))/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000),              (392400*h^2)/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000),   -(962361*h^4 - 20000)/(962361*h^4 + 392400*h^2 + 20000)]
```

2.2 L’allure de l’évolution

On programme la plus grande valeur propre dans Matlab, et on peut obtenir le graphique comme le suivant.



Et donc, on peut conclure que c’est une constante qui vaut 1. Donc, le schéma est stable.

2.3 Relation entre $q_0, \quad \dot{q}_0 \quad et \quad \ddot{q}_0$.

À partir de l’équation originale, on prend $t = 0$, et on peut obtenir la relation comme la suivante.

$$\ddot{q}_0 + \frac{g}{a}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} q_0 = 0$$

2.4 Les vecteurs d’états du système

Pour un schéma de Newmark implicite, les relations entre les variables aux instants t_n et t_{n+1}, quand on prend $\beta = 0.25$ et $\gamma = 0.5$, s’écrivent comme les suivantes.

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \frac{1}{4}\Delta t^2 \ddot{q}_n + \frac{1}{4}\Delta t^2 \ddot{q}_{n+1}$$

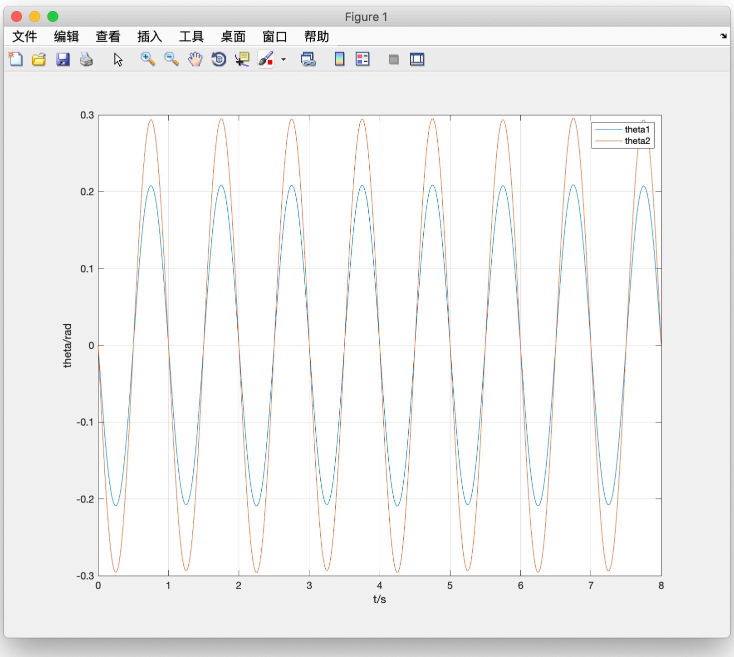
$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{1}{2}\Delta t \ddot{q}_n + \frac{1}{2}\Delta t \ddot{q}_{n+1}$$

Et ensuite, à partir de l'équation du mouvement, on peut obtenir la relation suivante.

$$\ddot{q}_{n+1} = -\frac{g}{a}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} q_{n+1} + \frac{F_0}{ma}\sin \omega t_{n+1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

2.5 Programmation sur Matlab

```
m = 2;
a = 0.5;
g = 9.81;
F0 = 20;
omega = 2 * pi;
T0 = 8;
D = [2,-1;-2,2];
E = [1,-1;-1,2];
F = [1;1/sqrt(2)];
Ide = eye(2);

gamma = 0.5;
beta = 0.25;

h = 0.02;
t = 0:h:T0;

q(1,1) = 0;
q(2,1) = 0;
dq(1,1) = -1.31519275;
dq(2,1) = -1.85996342;
ddq0(1,1) = 0;
ddq0(2,1) = 0;

for n = 2:length(t)
    G = Ide + 0.25 * h^2 * g / a * D;
    H = inv(G);
    q(:,n) = H * (q(:,n-1) + h * dq(:,n-1) + 0.25 * h^2 * ddq0(:,n-1) + 0.25 * h^2 * F0 / (m * a) * sin(omega * t(n)) * E * F);
    ddq(:,n-1) = -g / a * D * q(:,n) + F0 / (m * a) * sin(omega * t(n)) * E * F;
    dq(:,n) = dq(:,n-1) + 0.5 * h * (ddq0(:,n-1) + ddq(:,n-1));
    ddq0(:,n) = ddq(:,n-1);
end

plot(t,q(1,:));
hold on; grid on;
plot(t,q(2,:));
legend('theta1','theta2');
```



2.6 Les valeurs numériques

Quand $t = 0$,

$$q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.31519275 \\ -1.85996342 \end{pmatrix}$$

Quand $t = \Delta t$,

$$q(t) = \begin{pmatrix} -0.026200324118563 \\ -0.037052853623904 \end{pmatrix} \quad et \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.304839661856297 \\ -1.845321942390422 \end{pmatrix}$$

Quand $t = 2\Delta t$,

$$q(t) = \begin{pmatrix} -0.051988156647061 \\ -0.073522356048986 \end{pmatrix} \quad et \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -1.273943590993484 \\ -1.801628300117785 \end{pmatrix}$$

Quand $t = 25\Delta t = 0.5s$,

$$q(t) = \begin{pmatrix} -9.217135468317268e-04 \\ -0.001303500211934 \end{pmatrix} \quad et \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} 1.312432261963264 \\ 1.856059502101667 \end{pmatrix}$$