

1. 1.1 $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \omega_0 = 2\pi, q_0 = 1, \dot{q}_0 = 0, T_0 = 3s$

On a $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

donc $\lambda = \omega_0 i$ ou $\lambda = -\omega_0 i$

donc $q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$

on a $q_0 = C_1 = 1, \dot{q}_0 = \omega_0 C_2 = 0$

donc $q = \cos \omega_0 t = \cos 2\pi t$

1.2 $E^* = \frac{1}{2} [4\pi^2 \sin^2(2\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi t)] = 2\pi^2$

On peut trouver que E^* est une constant, sa valeur est $2\pi^2$

2. 2.1 $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t * \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 q_j \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} q_j + \Delta t \dot{q}_j \\ \dot{q}_j - \omega_0^2 \Delta t q_j \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} q_j + \Delta t \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 \Delta t q_j + \dot{q}_j \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2.2 Pour obtenir la solution exacte, les codes sont comme suit:

```
clear all; close all ; clc
T0 = 3 ; w0 = 2 * pi ; w0c = w0 * w0 ;
q0 = 1. ; dq0 = 0.0 ; dte = 0.01 ;
te = (0:dte:T0)' ;
npe = size(te,1) ;
qe = zeros(npe,1) ;
dqe = zeros(npe,1) ;
energe = zeros(npe,1);
tic;
qe = q0 * cos(w0 * te) + dq0/w0 * sin(w0 * te) ;
dqe = -w0 * q0 * sin(w0 * te) + dq0 * cos(w0 * te) ;
ddqe = - w0c * qe;
energe = 0.5*(dqe .* dqe + w0c * (qe.^2)) ; toc;
plot(te,qe,te, dqe,te, ddqe, '-r','Linewidth',2)
plot(qe,dqe,qe, ddqe, '-r','Linewidth',2)
plot(qe,ddqe, '-r','Linewidth',2)
plot(te,qe, '-r','Linewidth',2)
```

Pour obtenir la solution a l'aide d'un sch'ema d'EULER explicite, les codes sont comme suit:

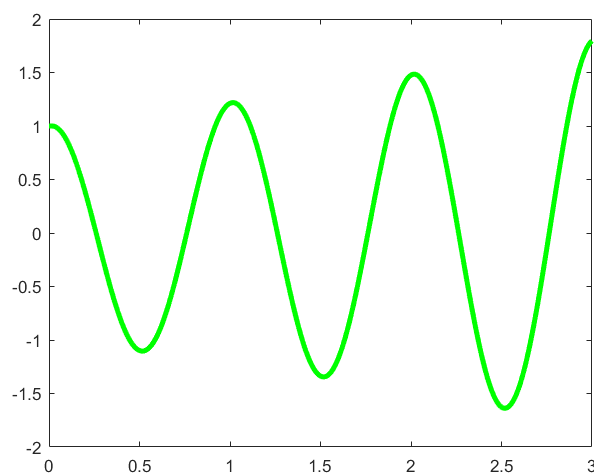
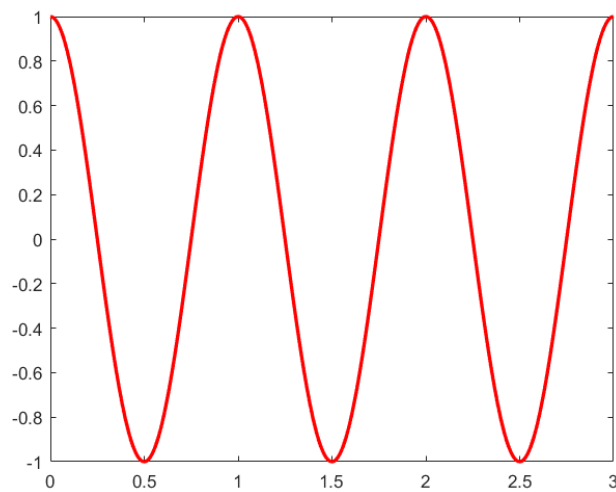
```
dt1 = 0.01;T0=3;
t1 = (0:dt1:T0)'
np1 = size(t1,1)
q1 = zeros(np1,1)
```

```

dq1 = zeros(np1,1) ;
ddq1 = zeros(np1,1) ;
energ1 = zeros(np1,1);
q1(1) = q0
dq1(1) = dq0
for inc = 2 : np1 ;
    q1(inc) = q1(inc-1) + dt1 * dq1(inc-1) ;
    dq1(inc) = dq1(inc-1) + dt1* ddq1(inc-1) ;
    ddq1(inc) = -w0c * q1(inc) ;
end;
energ1 = 0.5*(dq1 .* dq1 + w0c * (q1.^2))
plot(t1,q1,'g-', 'Linewidth',3)

```

2.3 la solution exacte et la solution d'EULER explicite sont comme suit :



On peut voir que la solution d'EULER explicite est divergente. Quand Δt est plus grand, plus la divergence est lente.

2.4 E^* est divergente, quand Δt est plus grand, E^* est plus grande, quand $t = 0$, $E^* = 2\pi^2$, quand $t > 0$, E^* est croissante.

2.5 les codes sont comme suite :

```
t1 = (0:dt1:T0)' ; np1 = size(t1,1);
q = [q0;dq0] ;
q1b = zeros(np1,1) ;
q1b(1) = q0 ;
A = [1 , dt1 ; -w0c * dt1 , 1] ;
for inc = 2 : np1 ;
    q = A * q ;
    q1b(inc) = q(1) ;
    dq1b(inc) = q(2) ;
end;
plot(t1,q1b,'b-','Linewidth',3)
plot(dq1b,q1b,'b-','Linewidth',3)
dt1= sym('dt1','real'); w0= sym('w0','real');
A = [1 , dt1 ; -1 * w0 * w0 * dt1 , 1]
% Z : vecteurs et valeurs propres : d
[z,d]=eig(A); z ; d
re = real(d)
im = imag(d)
mo=abs(d)
zm= inv(z) ; C= z * (d * zm); C = simplify(C)
```

les values propres:

```
d=
[ 1 - dt1*w0*1i,          0]
[          0, 1 + dt1*w0*1i]
```

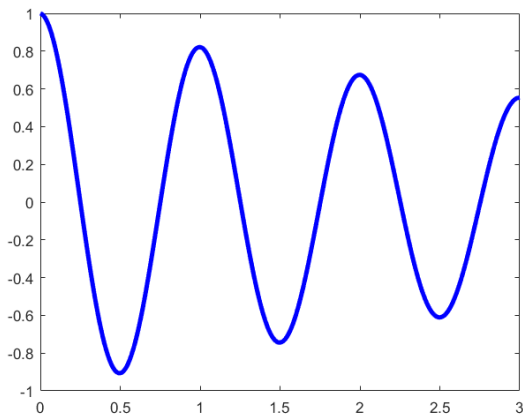
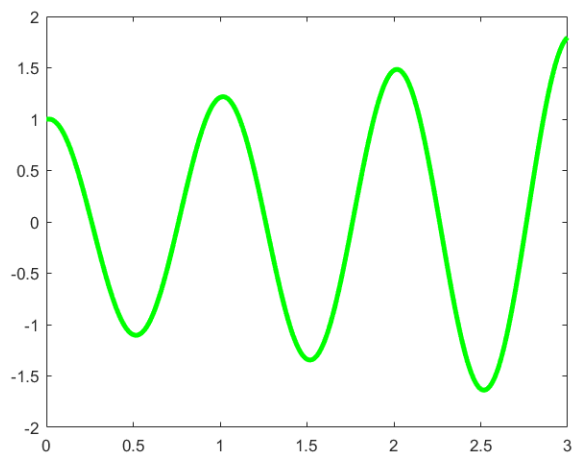
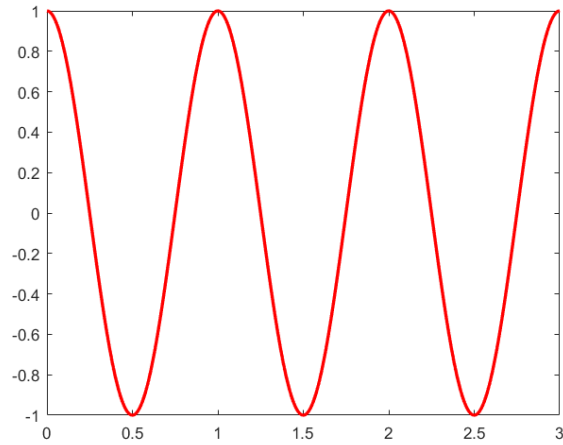
Parce que $|\lambda_i| > 1$, donc le schéma d'EULER explicite est inconditionnellement instable.

3. 3.1 les codes sont comme suite :

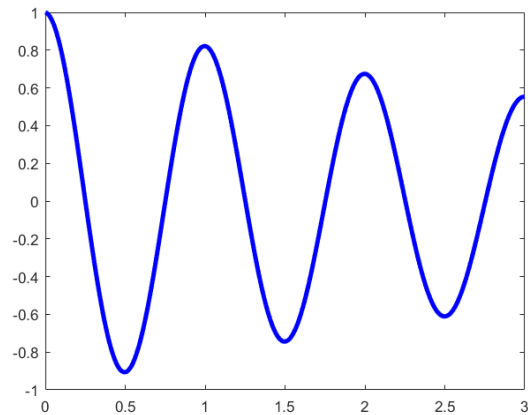
```
dt2 = 0.01;T0=3;
t2 = (0:dt2:T0)'
np2 = size(t2,1)
q2 = zeros(np2,1)
dq2 = zeros(np2,1) ;
energ2 = zeros(np2,1);
q2(1) = q0
dq2(1) = dq0
for inc = 2 : np2
    q2(inc) = (q2(inc-1) + dt2 * dq2(inc-1))/(1 + w0c * dt2 *
dt2)
```

```
ddqc = -w0c * q2(inc)
dq2(inc) = dq2(inc-1) + dt2 * ddqc
end
```

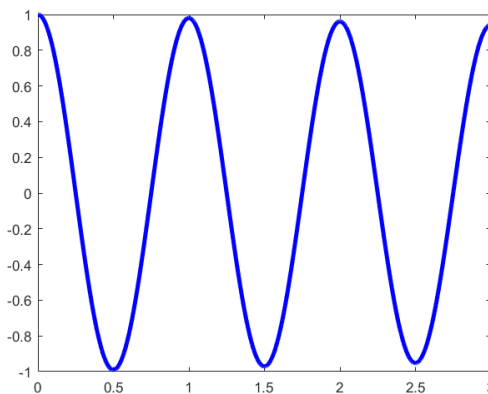
3.2 Quand $\Delta t = 0.01$, les 3 solutions s (solution exacte, EULER explicite et EULER implicite) sont comme suit:



3.3 Quand $\Delta t = 0.001$, l'atténuation des oscillations est plus faible que celui de $\Delta t = 0.01$, les 2 solutions sont comme suit :



$\Delta t = 0.01$



$\Delta t = 0.001$

Donc plus le pas de temps Δt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

3.4 Pour la solution exacte, $E^* = 2\pi^2$, est une constante,

Pour la solution d'un schéma d'EULER explicite, quand $t=0$, $E^* = 2\pi^2$, quand $t>0$, E^* est croissante.

Pour la solution d'un schéma d'EULER implicite, quand $t=0$, $E^* = 2\pi^2$, quand $t>0$, E^* est décroissante.

3.5 les codes de calculer les valeurs propres sont comme suit :

```
clear all; close all; clc;
dt1= sym('dt1','real');
w0= sym('w0','real');
A = [1 , -dt1 , 0 ; 0 , 1 , -dt1; w0 * w0, 0 , 1]
B = [1 , 0 , 0 ; 0 , 1, 0; 0, 0 , 0]
C= A\B
% identique C = inv(A) * B
```

```

% Vecteurs et valeurs propres
[z,d] = eig(C) ; d ;
simplify(d)
mo=abs(d)
% module <1 ? Oui schéma inconditionnellement stable
eval(mo)

```

les valeur propres :

```

mo =
[ 0, 0, 0]
[ 0, 1/abs(dt1*w0 + 1i), 0]
[ 0, 0, 1/abs(1 + dt1*w0*1i)]

```

Parce que $|\lambda_i| < 1$, donc le schéma d'EULER implicite est inconditionnellement stable.