

DM01-04

Christophe-LiYueXian-P2015-ZY1924116

Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

1. Solution analytique de l'équation (1)

1.1 $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \omega_0 = 2\pi, q_0 = 1, \dot{q}_0 = 0, T_0 = 3s$

On a $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

donc $\lambda = \omega_0 i$ ou $\lambda = -\omega_0 i$

donc $q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$

on a $q_0 = C_1 = 1, \dot{q}_0 = \omega_0 C_2 = 0$

donc $q = \cos \omega_0 t = \cos 2\pi t$

1.2 $E^* = \frac{1}{2} [4\pi^2 \sin^2(2\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi t)] = 2\pi^2$

On peut trouver que E^* est une constant, sa valeur est $2\pi^2$

2. Résolution de l'équation (1) avec un schéma d'EULER explicite

2.1 $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t * \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 q_j \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} q_j + \Delta t \dot{q}_j \\ \dot{q}_j - \omega_0^2 \Delta t q_j \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} q_j + \Delta t \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 \Delta t q_j + \dot{q}_j \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2.2 Pour obtenir la solution exacte, les codes sont comme suit:

```
clear all; close all; clc
T0 = 3 ; w0 = 2 * pi ; w0c = w0 * w0 ;
q0 = 1. ; dq0 = 0.0 ; dte = 0.01 ;
te = (0:dte:T0)' ;
npe = size(te,1) ;
qe = zeros(npe,1) ;
dqe = zeros(npe,1) ;
energe = zeros(npe,1);
tic;
qe = q0 * cos(w0 * te) + dq0/w0 * sin(w0 * te) ;
dqe = -w0 * q0 * sin(w0 * te) + dq0 * cos(w0 * te) ;
ddqe = - w0c * qe;
energe = 0.5*(dqe .* dqe + w0c * (qe.^2)) ; toc;
```

```

plot(te,qe,te, dqe,te, ddqe, '-r','Linewidth',2)
plot(qe,dqe,qe, ddqe, '-r','Linewidth',2)
plot(qe,ddqe, '-r','Linewidth',2)
plot(te,qe, '-r','Linewidth',2)

```

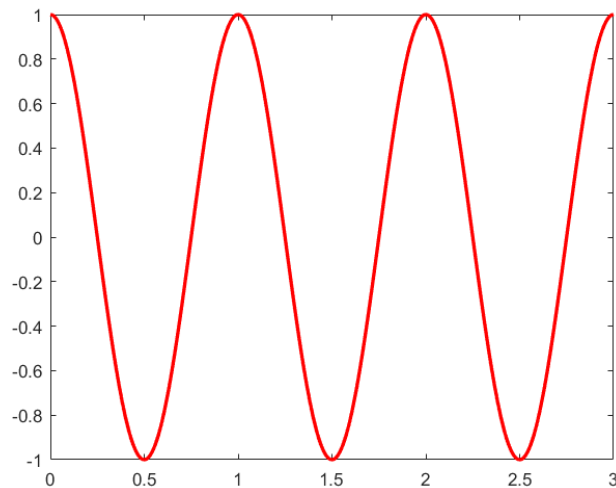
Pour obtenir la solution a l'aide d'un sch'ema d'EULER explicite, les codes sont comme suit:

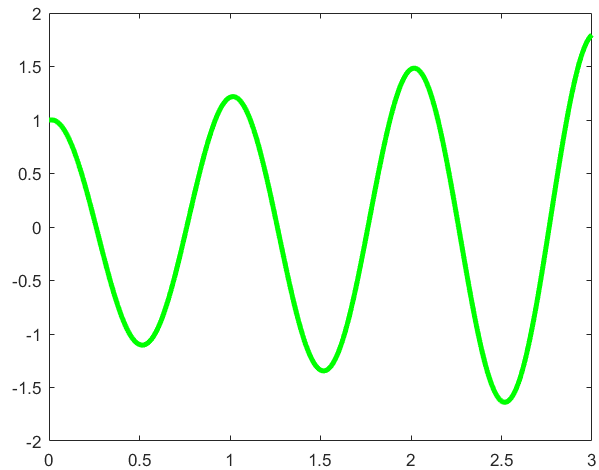
```

dt1 = 0.01;T0=3;
t1 = (0:dt1:T0)'
np1 = size(t1,1)
q1 = zeros(np1,1)
dq1 = zeros(np1,1) ;
ddq1 = zeros(np1,1) ;
energ1 = zeros(np1,1);
q1(1) = q0
dq1(1) = dq0
for inc = 2 : np1 ;
    q1(inc) = q1(inc-1) + dt1 * dq1(inc-1) ;
    dq1(inc) = dq1(inc-1) + dt1* ddq1(inc-1) ;
    ddq1(inc) = -w0c * q1(inc) ;
end;
energ1 = 0.5*(dq1 .* dq1 + w0c * (q1.^2))
plot(t1,q1,'g-', 'Linewidth',3)

```

2.3 la solution exacte et la solution d'EULER explicite sont comme suit :





On peut voir que la solution d'EULER explicite est divergente. Quand Δt est plus grand, plus la divergence est lente.

2.4 E^* est divergente, quand Δt est plus grand, E^* est plus grande, quand $t = 0$, $E^* = 2\pi^2$, quand $t > 0$, E^* est croissante.

2.5 les codes sont comme suite :

```
t1 = (0:dt1:T0)' ; np1 = size(t1,1);
q = [q0;dq0] ;
q1b = zeros(np1,1) ;
q1b(1) = q0 ;
A = [1 , dt1 ; -w0c * dt1 , 1] ;
for inc = 2 : np1 ;
    q = A * q ;
    q1b(inc) = q(1) ;
    dq1b(inc) = q(2) ;
end;
plot(t1,q1b,'b-','Linewidth',3)
plot(dq1b,q1b,'b-','Linewidth',3)
dt1= sym('dt1','real'); w0= sym('w0','real');
A = [1 , dt1 ; -1 * w0 * w0 * dt1 , 1]
% Z : vecteurs et valeurs propres : d
[z,d]=eig(A); z ; d
re = real(d)
im = imag(d)
mo=abs(d)
zm= inv(z) ; C= z * (d * zm); C = simplify(C)
les values propres:
d=
[ 1 - dt1*w0*1i,          0]
[          0, 1 + dt1*w0*1i]
```

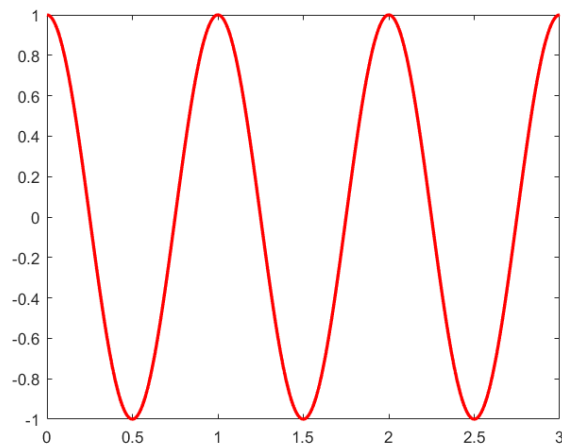
Parce que $|\lambda_i| > 1$, donc le schéma d'EULER explicite est inconditionnellement instable.

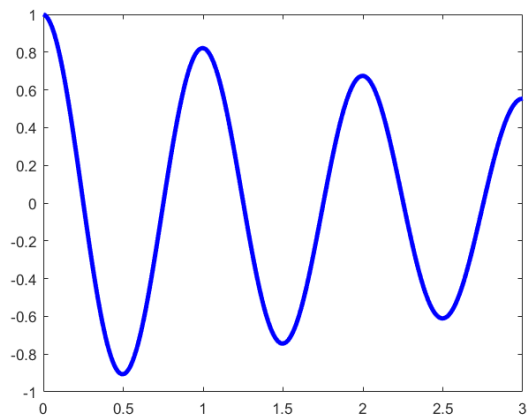
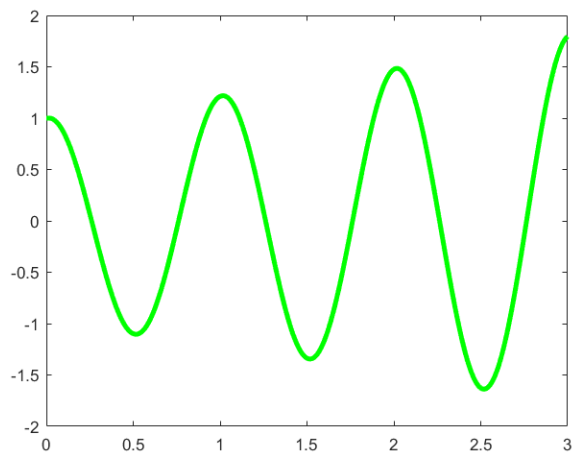
3. Résolution de l'équation (1) avec un schéma d'EULER implicite

3.1 les codes sont comme suite :

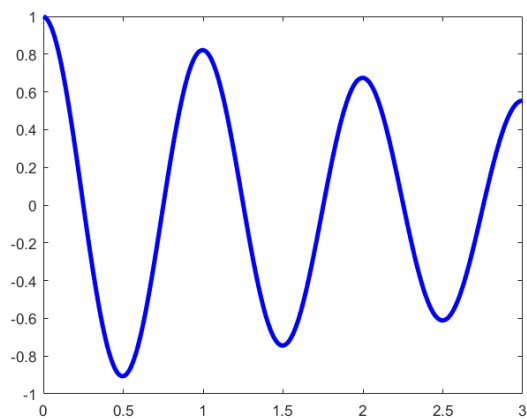
```
dt2 = 0.01;T0=3;
t2 = (0:dt2:T0)';
np2 = size(t2,1)
q2 = zeros(np2,1)
dq2 = zeros(np2,1) ;
energ2 = zeros(np2,1);
q2(1) = q0
dq2(1) = dq0
for inc = 2 : np2
    q2(inc) = (q2(inc-1) + dt2 * dq2(inc-1))/(1 + w0c * dt2 *
dt2)
    ddqc = -w0c * q2(inc)
    dq2(inc) = dq2(inc-1) + dt2 * ddqc
end
```

3.2 Quand $\Delta t = 0.01$, les 3 solutions s (solution exacte, EULER explicite et EULER implicite) sont comme suit:

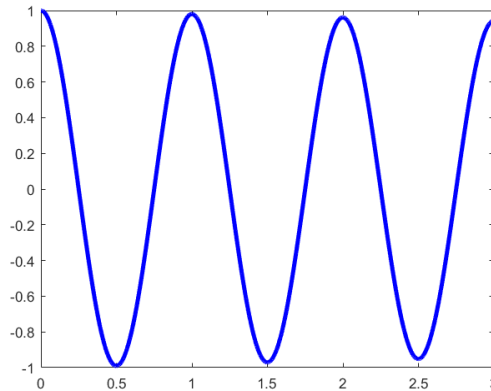




3.3 Quand $\Delta t = 0.001$, l'atténuation des oscillations est plus faible que celui de $\Delta t = 0.01$, les 2 solutions sont comme suit :



$\Delta t = 0.01$



$$\Delta t = 0.001$$

Donc plus le pas de temps Δt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

3.4 Pour la solution exacte, $E^* = 2\pi^2$, est une constante,

Pour la solution d'un schéma d'EULER explicite, quand $t=0$, $E^* = 2\pi^2$, quand $t>0$, E^* est croissante.

Pour la solution d'un schéma d'EULER implicite, quand $t=0$, $E^* = 2\pi^2$, quand $t>0$, E^* est décroissante.

3.5 les codes de calculer les valeurs propres sont comme suit :

```
clear all; close all; clc;
dt1= sym('dt1','real');
w0= sym('w0','real');
A = [1 , -dt1 , 0 ; 0 , 1 , -dt1; w0 * w0, 0 , 1]
B = [1 , 0 , 0 ; 0 , 1, 0; 0, 0 , 0]
C= A\B
% identique C = inv(A) * B
% Vecteurs et valeurs propres
[z,d] = eig(C) ; d ;
simplify(d)
mo=abs(d)
% module <1 ? Oui schéma inconditionnellement stable
eval(mo)
```

les valeur propres :

```
mo =
[ 0, 0, 0]
[ 0, 1/abs(dt1*w0 + 1i), 0]
[ 0, 0, 1/abs(1 + dt1*w0*1i)]
```

Parce que $|\lambda_i| < 1$, donc le schéma d'EULER implicite est inconditionnellement stable.

4. Résolution de l'équation (1) avec un schéma de RUNGE KUTTA

4.1 On a $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$

On pose que
$$\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = \dot{q} \end{cases}$$

Alors
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 \end{cases}$$

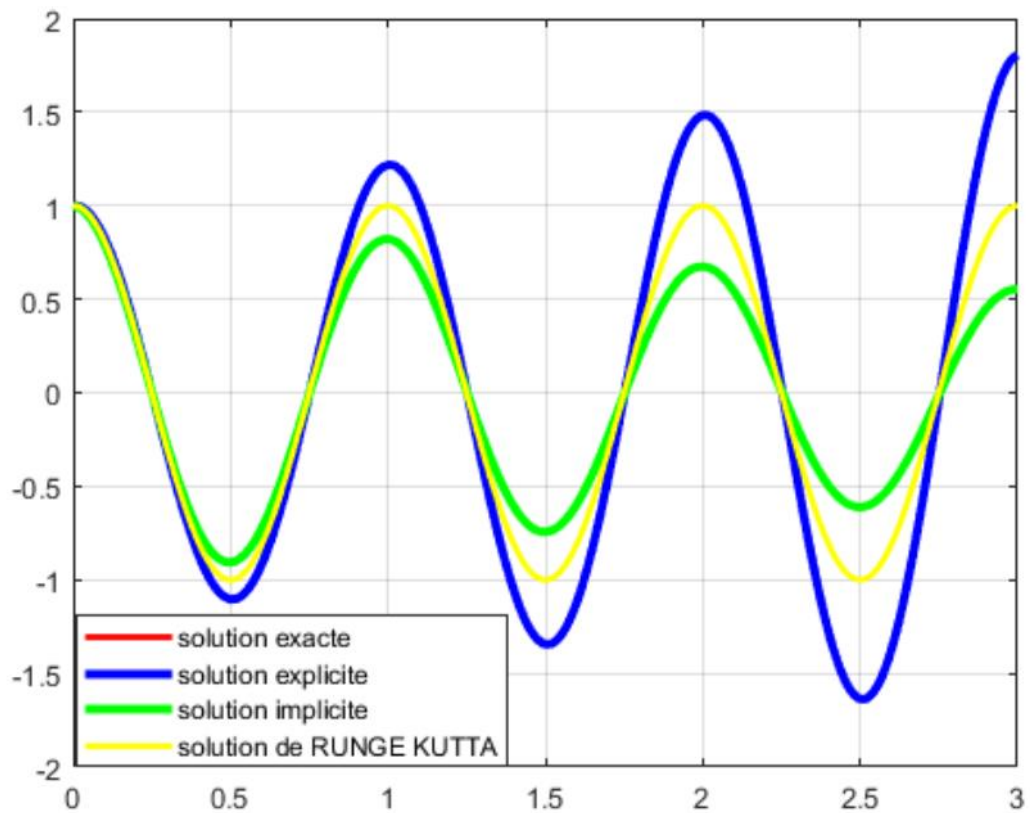
Donc on a
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

4.2 On programme la résolution de l'équation du mouvement que on a obtenue à l'aide d'un schéma de RUNGE KUTTA.

```
clear all
clc;
T0=3;
q0 =1;
dq0=0;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
dt3 = 0.01;
t3 = (0:dt3:T0)';
np3 = size(t3,1);
q3 = zeros(np3,1);
dq3 = zeros(np3,1);
energ3 = zeros(np3,1);
q3(1) = q0;
dq3(1) = dq0;
qj = [q0 ; dq0];
C = [0 1; -w0c 0];
for inc = 2 : np3
    k1 = C*qj;
    k2 = C*(qj+k1*dt3/2);
    k3 = C*(qj+k2*dt3/2);
    k4 = C*(qj+k3*dt3);
    K = (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
    qj = qj + K * dt3;
    q3(inc) = qj(1);
    dq3(inc) = qj(2);
end
energ3 = 0.5*(dq3 .* dq3 + w0c * (q3.^2));
plot(t3,q3, '-r', 'Linewidth', 2)
plot(t3,energ3, 'b-', 'Linewidth', 3)
```

4.3 Comparer les valeurs de la solution $q(t)$ obtenues avec un schéma de RUNGE KUTTA avec celles calculées précédentes (solution exacte, schéma d'EULER explicite et schéma d'EULER implicite), on peut trouver que la solution de schéma d'EULER explicite est plus grande que

la solution exacte, la solution de schéma d'EULER implicite est plus petite que la solution exacte et ils sont divergents. Mais la solution de schéma de RUNGE KUTTA est presque la même avec la solution exacte.



4.4 On Calcule la quantité E^* associée au schéma de RUNGE KUTTA et compare les valeurs obtenues avec celles calculées à l'aide de la solution exacte, d'un schéma d'EULER explicite et d'un schéma d'EULER implicite. On peut trouver que la solution du schéma de RUNGE KUTTA a la même de quantité avec la solution exacte.

Étude d'un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté

1.1) Résolution avec un schéma d'EULER explicite

La programme est la suivante:

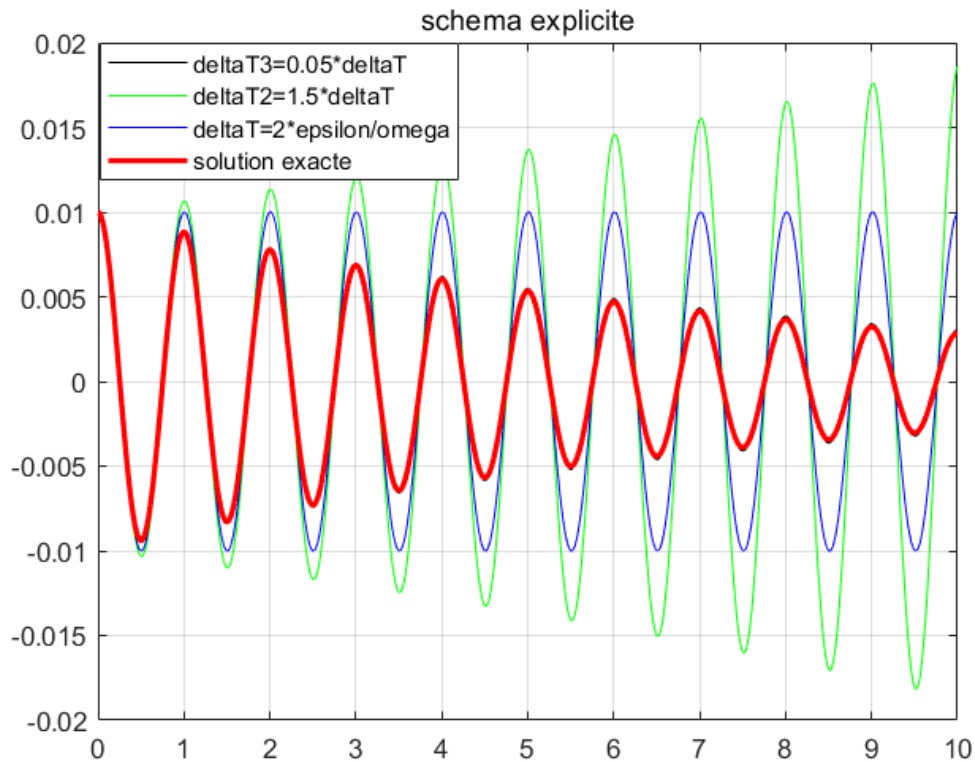
```
omega=2*pi;
epsilon=0.02;
OMEGA=omega*(1-epsilon^2)^(0.5);
deltaT=2*epsilon/omega;
T0=1;
x=0.01;
xd=0;
% Euler Explicite
A1=[1 deltaT;-omega^2*deltaT 1-2*epsilon*omega*deltaT];
U=[x;xd];
Y1=[];
for j=1:(10*T0/deltaT)
    Y1(j)=U(1);
    U=A1*U;
end
abs(eig(A1))
J=linspace(0,10*T0,10*T0/deltaT);
Y0=(exp(-epsilon*omega*J)).*(x*cos(OMEGA*J)+(epsilon*omega*x+xd)*sin(OMEGA*J)/OMEGA);
deltaT2=1.5*deltaT;
deltaT3=0.05*deltaT;
A2=[1 deltaT2;-omega^2*deltaT2 1-2*epsilon*omega*deltaT2];
U=[x;xd];
Y2=[];
for j=1:(10*T0/deltaT2)
    Y2(j)=U(1);
    U=A2*U;
end
A3=[1 deltaT3;-omega^2*deltaT3 1-2*epsilon*omega*deltaT3];
U=[x;xd];
Y3=[];
for j=1:(10*T0/deltaT3)
    Y3(j)=U(1);
    U=A3*U;
end
K=linspace(0,10*T0,10*T0/deltaT2);
L=linspace(0,10*T0,10*T0/deltaT3);
figure(1)
```

```

plot(L,Y3,'k'); hold on
plot(K,Y2,'g'); hold on
plot(J,Y1,'b'); hold on
plot(J,Y0,'r','Linewidth',2);
title('schema explicite');
legend('deltaT3=0.05*deltaT','deltaT2=1.5*deltaT','deltaT=2*ep
silon/omega','solution exacte');
grid on

```

Alors on peut obtenir le résultats suivante



1.1a) Si

$$\Delta t > \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

La solution explicite est divergente et il est plus grand que la solution exacte. La solution est croissante.

1.1b) Si

$$\Delta t = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

La solution explicite est constante, est plus grand que la solution exacte.

1.1c) Si

$$\Delta t < \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

La solution explicite est divergente. La solution est décroissant, mais il est toujours

grand que la solution exacte.

1.1d)- Les critères permettant d'étudier la précision de la solution :

$$\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 - 2\varepsilon \omega_0 \Delta t \end{bmatrix} = A$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$0 < \varepsilon < 1$$

donc on a

$$\lambda = 1 - \varepsilon \omega_0 \Delta t \pm i \omega_0 \Delta t [1 - \varepsilon^2]^{1/2}$$

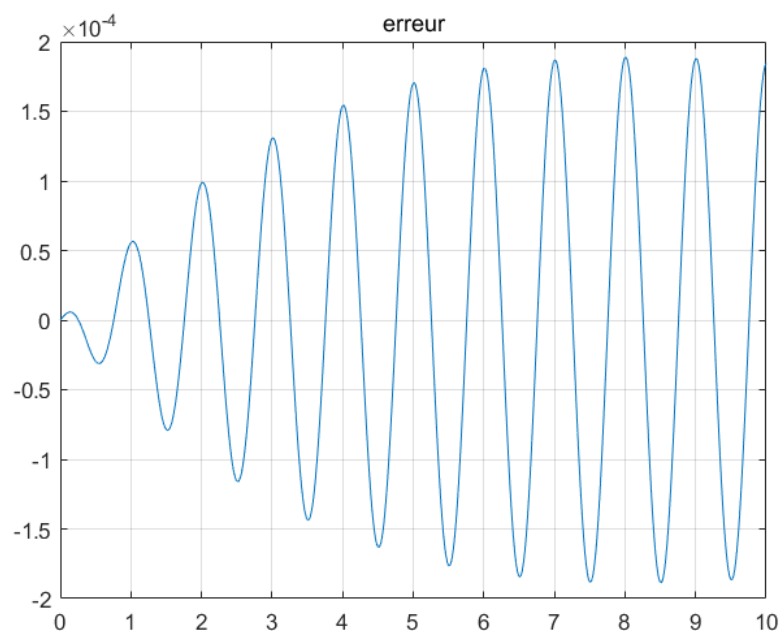
alors que $|\lambda| < 1$

donc

$$\Delta t < \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

- Quand $\frac{\Delta t}{\frac{2\varepsilon}{\omega_0}} \leq 0.05$, la solution calculée présente-t-elle une précision suffisante.

```
% abs(xexplicit-x)<gamma, gamma est l'ordre de la précision
Y30=(exp(epsilon*omega*L) .* (x*cos(OMEGA*L) + (epsilon*omega*x+xd) *
(sin(OMEGA*L))/OMEGA);
figure(2)
plot(L, (Y3-Y30));
title('erreur');
grid on
```



1.2) Résolution avec un schéma d'EULER implicite

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \dot{x}_{n+1}$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \Delta t \ddot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \Delta t (-2\varepsilon \omega_0 \dot{x}_{n+1} - \omega_0^2 x_{n+1})$$

$$\dot{x}_n = -2\varepsilon \omega_0 \dot{x}_n - \omega_0^2 x_n$$

$$\begin{aligned}
 -\Delta t \dot{x}_{n+1} + x_{n+1} &= x_n \\
 (1 + 2\varepsilon\omega_0\Delta t)\dot{x}_{n+1} + \omega_0^2\Delta t x_{n+1} &= \dot{x}_n \\
 \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ \omega_0^2\Delta t & 1 + 2\varepsilon\omega_0\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

```

syms deltaTx
B=[1 -deltaTx; omega^2*deltaTx 1+2*epsilon*omega*deltaTx];
eig(B^(-1))

```

```

ans =
(8388608*(8388608*pi*deltaTx + deltaTx*(70368744177664*pi^2 -
1736279168087509375)^(1/2) + 209715200))/(69451166723500375*deltaTx^2 +
140737488355328*pi*deltaTx + 1759218604441600)
(8388608*(8388608*pi*deltaTx - deltaTx*(70368744177664*pi^2 -
1736279168087509375)^(1/2) + 209715200))/(69451166723500375*deltaTx^2 +
140737488355328*pi*deltaTx + 1759218604441600)

```

1.3) Résolution avec un schéma de RUNGE KUTTA

1.3.a) Calculer la solution obtenue pour les trois valeurs suivantes du coefficient h :

h = 0.04 h = 0.96 h = 1.04

```

clear all
clc;
w0 = 2*pi;
epsilon=0.02;
T0=1;
x0=0.01;
dx0=0;
w0c = w0*w0;
h1 = 0.04;
dt1=h1*2*sqrt(2)/w0;
t = (0:dt1:100*T0)';
np = size(t,1);
x1 = zeros(np,1);
dx1 = zeros(np,1);
x1(1) = x0;
dx1(1) = dx0;
xj = [x0 ; dx0];
A = [-1 1;0 w0c*dt1];
B = [0 dt1;1 -(1+2*epsilon*w0*dt1)];
C = inv(B)*A;
for inc = 2 : np
k1 = C*xj;
k2 = C*(xj+k1*dt1/2);

```

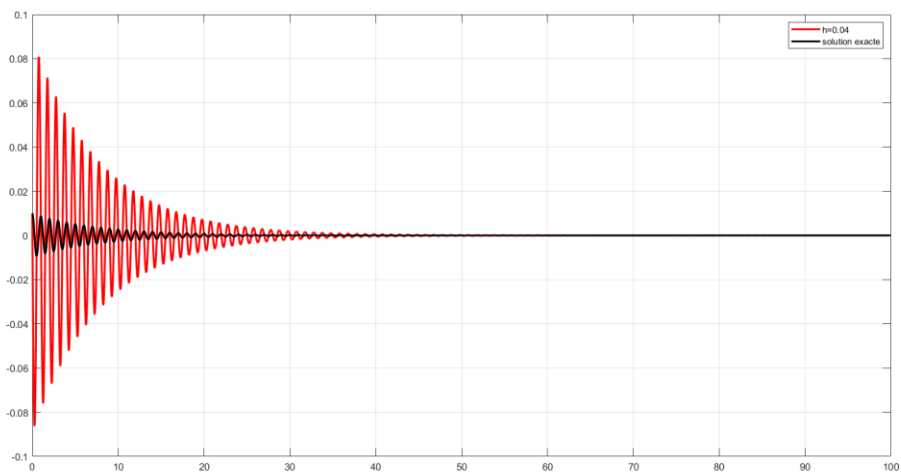
```

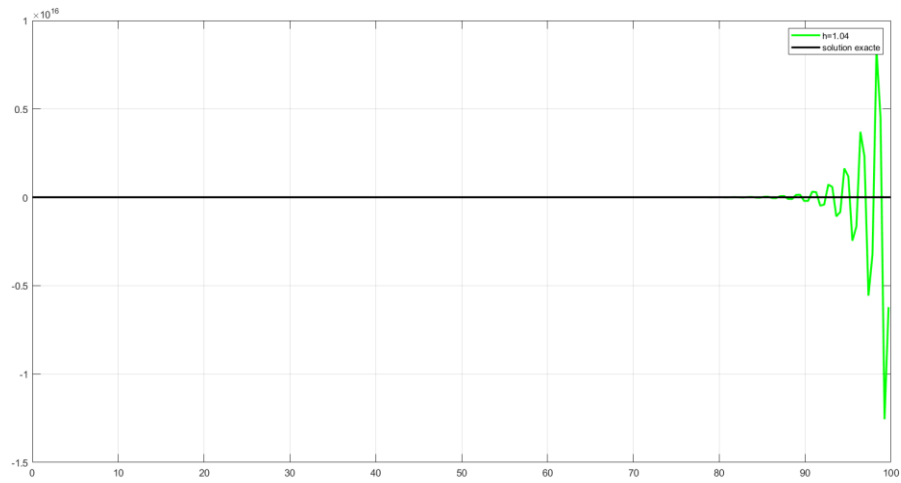
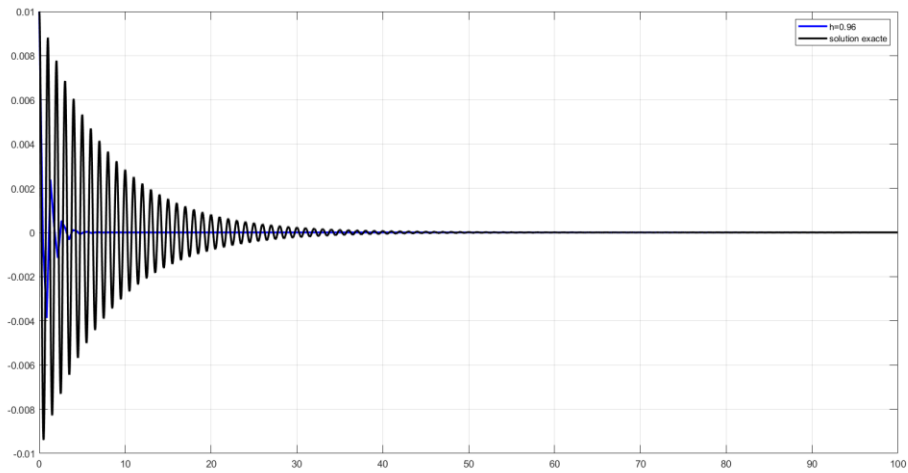
k3 = C*(xj+k2*dt1/2);
k4 = C*(xj+k3*dt1);
K = (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
xj = xj + K * dt1;
x1(inc) = xj(1);
dx1(inc) = xj(2);
end
plot(t,x1, '-r', 'Linewidth',2)

hold on

omega=2*pi;
epsilon=0.02;
OMEGA=omega*(1-epsilon^2)^(0.5);
deltaT=2*epsilon/omega;
T0=1;
x=0.01;
xd=0;
J=linspace(0,100*T0,100*T0/deltaT);
Y0=(exp(-
epsilon*omega*J)).*(x*cos(OMEGA*J)+(epsilon*omega*x+xd)*(sin(OMEGA
A*J))/OMEGA);
plot(J,Y0,'k', 'Linewidth',2);
legend('h=0.04', 'solution exacte');
grid on

```





Par les trois résultats, on peut trouver que quand $h=0.04$ et $h=0.96$, les résultats sont stable et $h=1.04$ n'est pas stable. Et $h=0.04$ est plus précise que $h=0.96$ et $h=1.04$.

1.3.b) On va calculer une valeur approximative du pas de temps critique Δt_c . Cette valeur sera donnée sous la forme:

$$\Delta t_c = h_c \times \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0}$$

où $h_{min} < h_c < h_{max}$ et $|h_{max} - h_{min}| \leq 0.001$

Etude d'un double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements

1. 1.1) on a $ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = F_0 \sin \omega t \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$

Soit $q_n = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_n$, alors

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ddot{q}_n + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q_n = F_0 \sin \omega t \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q}_n + \left(ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} * \left(mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) q_n = \left(ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} * F_0 \sin \omega t \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$$

Donc $\ddot{q}_n + W^2 q_n = F \sin \omega t$,

Avec $W^2 = \left(ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} * \left(mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$,

$$F = \left(ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} * F_0 \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$$

On a $\begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 * 0.5 * (F - W^2 q_j) \\ \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j - 0.5 \Delta t W^2 q_j - 0.5 \Delta t W^2 q_{j+1} + \Delta t F \end{cases}$

Donc $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 \Delta t W^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - 0.5 \Delta t^2 W^2 & \Delta t \\ -0.5 \Delta t W^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix} + F \sin \omega t \begin{bmatrix} 0.5 \Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix}$

Soit $B = \begin{bmatrix} I & 0 * I \\ 0.5 \Delta t W^2 & I \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} I - 0.5 \Delta t^2 W^2 & \Delta t * I \\ -0.5 \Delta t W^2 & I \end{bmatrix}$

Alors $A = \text{inv}(B) * C = \begin{bmatrix} I - 0.5 \Delta t^2 W^2 & \Delta t * I \\ 0.25 \Delta t^3 W^4 - \Delta t W^2 & I - 0.5 \Delta t^2 W^2 \end{bmatrix}$

Avec $W^2 = \left(ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} * \left(mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2g}{a} & -\frac{g}{a} \\ -\frac{2g}{a} & \frac{2g}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39.24 & -19.62 \\ -39.24 & 39.24 \end{bmatrix}$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2) $\det \left[A - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$

Donc $(\gamma + 1/2)^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\Delta t^2 W^2}$

Alors $\Delta t^2 \leq \frac{4}{W^2}$

Donc $\Delta t^2 \leq 0.102$
 $\Delta t \leq 0.32$

$$1.3) \quad \ddot{q}_0 + W^2 q_0 = F \sin \omega t, \quad q_0 = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{q}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} -1.31519275 \\ -1.85996342 \end{bmatrix}$$

$$1.4) \quad \begin{cases} q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 * 0.5 * \ddot{q}_n \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + 0.5 \Delta t W^2 \ddot{q}_n + 0.5 \Delta t W^2 \ddot{q}_{n+1} \\ \ddot{q}_n + W^2 q_n = F \sin \omega t \\ \ddot{q}_{n+1} + W^2 q_{n+1} = F \sin \omega t \end{cases}$$

$$\text{Avec} \quad W^2 = \left(ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} * \left(mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$F = \left(ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} * F_0 \begin{bmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

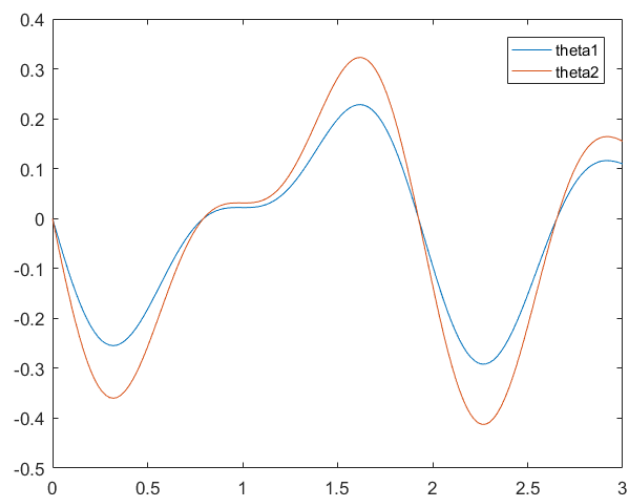
1.5) La programme est la suivante:

```

1 clear all;
2 dt1= 0.02;
3 t = [0:dt1:3]';
4 q0 = [0;0];
5 dq0 = [-1.31519275;-1.85996342];
6 a= 0.5;m=2;g= 9.81;F0= 20;
7 w= 2*pi;
8 be= 0;
9 ga= 0.5;
10 I2=[1 0;0 1];
11 W2=inv([2,1;1,1])*m*g*a*[2,0;0,1]/(m*a*a);
12 F=inv([2,1;1,1])*F0*[a;a/sqrt(2)]/(m*a*a);
13 C = [I2 - dt1 * dt1 * (0.5 - be) * W2 , dt1*I2 ; - (1 - ga) * dt1* W2 , I2];
14 B= [I2+be*dt1*dt1* W2 , 0*I2 ; ga*dt1* W2 ,I2];
15 A = B\C; %vecteurs et valeurs propres
16 vp=eig(A);
17 re = [real(vp(2));real(vp(4))];
18 im = [imag(vp(2));imag(vp(4))];
19 mo=[abs(vp(2));abs(vp(4))];
20 U(:,1)=[q0;dq0];
21 for i=1:length(t)-1
22     U(:,i+1)=A*U(:,i)+inv(B)*([0.5*dt1^2*I2 0*I2;0*I2 0.5*dt1*I2]*[F;F]*sin(w*i*dt1));
23 end
24 ddq=F*(sin(w*t))'-W2*[U(1,:);U(2,:)]
25 plot(t,U(1,:));
26 hold on;
27 plot(t,U(2,:));
28 legend('theta1','theta2')

```

1.6) Le résultat est présenté ci-dessous:



Quang $t = 0s, q(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dot{q}(0) = \begin{bmatrix} -1.32 \\ -1.86 \end{bmatrix}, \ddot{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$

Quang $t = \Delta t = 0.02s, q(0.02) = \begin{bmatrix} -0.0262 \\ -0.0370 \end{bmatrix}, \dot{q}(0.02) = \begin{bmatrix} -1.31 \\ -1.85 \end{bmatrix}, \ddot{q}(0.02) = \begin{bmatrix} 1.03 \\ 1.46 \end{bmatrix}$

Quang $t = 2\Delta t = 0.04s, q(0.04) = \begin{bmatrix} -0.0519 \\ -0.0734 \end{bmatrix}, \dot{q}(0.04) = \begin{bmatrix} -1.28 \\ -1.81 \end{bmatrix}, \ddot{q}(0) = \begin{bmatrix} 2.05 \\ 2.90 \end{bmatrix}$

Quang $t = 0.5s, q(0.5) = \begin{bmatrix} -0.182 \\ -0.257 \end{bmatrix}, \dot{q}(0) = \begin{bmatrix} 0.693 \\ 0.981 \end{bmatrix}, \ddot{q}(0) = \begin{bmatrix} 2.09 \\ 2.95 \end{bmatrix}.$

2. 2.1) on a $ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = F_0 \sin \omega t \begin{bmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Donc $\begin{cases} 2ma^2\ddot{\theta}_1 + ma^2\ddot{\theta}_2 + 2mga\theta_1 = F_0 \sin \omega t a \\ ma^2\ddot{\theta}_1 + ma^2\ddot{\theta}_2 + mga\theta_2 = F_0 \sin \omega t a / \sqrt{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} & 2ma^2\Delta_1\ddot{q}_{j+1} + ma^2\Delta_2\ddot{q}_{j+1} + mga\Delta_1q_{j+1} \\ & = F_0 \sin \omega t * a - (2ma^2\ddot{q}_{j+1}^{*1} + ma^2\ddot{q}_{j+1}^{*2} + 2mgaq_{j+1}^{*1}) \end{aligned}$$

Avec $\Delta_1q_{j+1} = \beta\Delta t^2\Delta_1\ddot{q}_{j+1}$

Donc $(2ma^2 + 2mga\beta\Delta t^2)\Delta_1\ddot{q}_{j+1} + ma^2\Delta_2\ddot{q}_{j+1}$
 $= F_0 \sin \omega t * a - (2ma^2\ddot{q}_{j+1}^{*1} + ma^2\ddot{q}_{j+1}^{*2} + 2mgaq_{j+1}^{*1})$

De même $ma^2\Delta_1\ddot{q}_{j+1} + (ma^2 + mga\beta\Delta t^2)\Delta_2\ddot{q}_{j+1}$
 $= F_0 \sin \omega t * \frac{a}{\sqrt{2}} - (ma^2\ddot{q}_{j+1}^{*1} + ma^2\ddot{q}_{j+1}^{*2} + mgaq_{j+1}^{*2})$

Donc $\begin{bmatrix} 2ma^2 + 2mga\beta\Delta t^2 & ma^2 \\ ma^2 & ma^2 + mga\beta\Delta t^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta_1\ddot{q}_{j+1} \\ \Delta_2\ddot{q}_{j+1} \end{bmatrix} =$
 $\begin{bmatrix} F_0 \sin \omega t * a - (2ma^2\ddot{q}_{j+1}^{*1} + ma^2\ddot{q}_{j+1}^{*2} + 2mgaq_{j+1}^{*1}) \\ F_0 \sin \omega t * \frac{a}{\sqrt{2}} - (ma^2\ddot{q}_{j+1}^{*1} + ma^2\ddot{q}_{j+1}^{*2} + mgaq_{j+1}^{*2}) \end{bmatrix}$

Donc $A = inv \left(\begin{bmatrix} 2ma^2 + 2mga\beta\Delta t^2 & ma^2 \\ ma^2 & ma^2 + mga\beta\Delta t^2 \end{bmatrix} \right)$
 $A = inv \left(\begin{bmatrix} 1 + 4.905\Delta t^2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 + 2.4525\Delta t^2 \end{bmatrix} \right)$

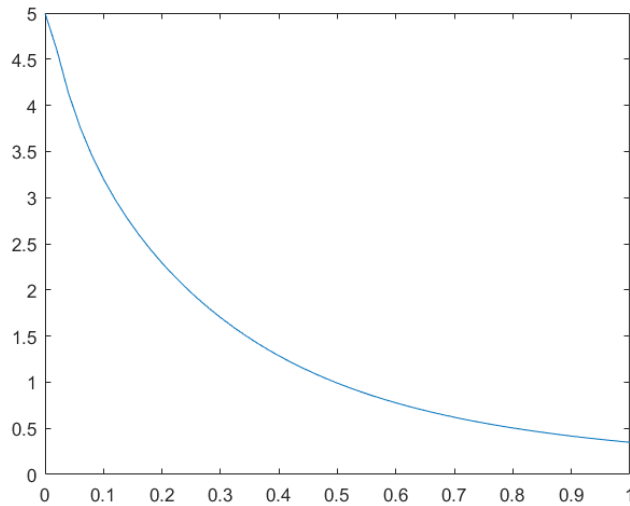
2.2) La programme est la suivante:

```

1  a= 0.5;m=2;g= 9.81;F0= 20;
2  w= 2*pi;
3  dt2=0.02;
4  t2=[0:dt2:1]'
5  be= 0.25;
6  ga= 0.5;
7  v=[0];
8  for i=1:length(t2)-1
9      A=inv([2*m*a+2*m*g*a*be*dt2*i m*a*a;m*a*a m*a*a+m*g*a*be*(dt2*i)^2])
10     [z,d]=eig(A)
11     re = real(d);
12     im = imag(d);
13     mo=abs(d);
14     v=[v,max(max(d)) ]
15 end
16 plot(t2,v)

```

Le résultat est présenté ci-dessous:



Nous pouvons voir que c'est une fonction décroissante. La valeur propre maximale diminue à mesure que la taille de pas Δt augmente.

$$2.3) \quad \ddot{q}_0 + W^2 q_0 = F \sin \omega t, \quad q_0 = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{q}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} -1.31519275 \\ -1.85996342 \end{bmatrix}$$

2.4)

D'après la question 2.1, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 q_{j+1} = \beta \Delta t^2 \Delta_1 \ddot{q}_{j+1}; \quad \Delta_1 \dot{q}_{j+1} = \gamma \Delta t \Delta_1 \ddot{q}_{j+1} \\ \Delta_2 q_{j+1} = \beta \Delta t^2 \Delta_2 \ddot{q}_{j+1}; \quad \Delta_2 \dot{q}_{j+1} = \gamma \Delta t \Delta_2 \ddot{q}_{j+1} \end{array} \right. \quad \begin{bmatrix} 2ma^2 + 2mga\beta\Delta t^2 & ma^2 \\ ma^2 & ma^2 + mga\beta\Delta t^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta_1 \ddot{q}_{j+1} \\ \Delta_2 \ddot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \sin \omega t * a - (2ma^2 \ddot{q}_{1,j+1}^* + ma^2 \ddot{q}_{2,j+1}^* + 2mgaq_{1,j+1}^*) \\ F_0 \sin \omega t * \frac{a}{\sqrt{2}} - (ma^2 \ddot{q}_{1,j+1}^* + ma^2 \ddot{q}_{2,j+1}^* + mgaq_{2,j+1}^*) \end{bmatrix}$$

Oscillateur non linéaire à un degré de liberté

1. Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

1.1 On a

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{j+1}$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \Delta t \gamma \ddot{q}_{j+1}$$

$$q_{j+1}'' = -\omega_0^2 q_{j+1}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \Delta t^2 \\ 0 & 1 & -\gamma \Delta t \\ \omega_0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ q_{j+1}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2 (0.5 - \beta) \\ 0 & 1 & \Delta t (1 - \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{bmatrix}$$

Et

$$q_{j+1}'' = -\omega_0^2 q_{j+1}$$

$$\ddot{q}_j = -\omega_0^2 q_j$$

$$\text{On a } \begin{bmatrix} 1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 & 0 \\ \gamma \Delta t \omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t^2 (0.5 - \beta) \omega_0^2 & \Delta t \\ (\gamma - 1) \Delta t \omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

$$\text{Comme } B \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = (B^{-1} \times C) \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

matrice d'amplification

$$A = (B^{-1} \times C)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2)} & \frac{\Delta t}{1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2} \\ -\omega_0^2 \Delta t \left[1 - \frac{\gamma \omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2)} \right] & 1 - \frac{\gamma \omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2)} \end{bmatrix}$$

Car $\beta = 0, \gamma = 0.5$

On a

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2 \Delta t^2}{2} & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t \left[1 - \frac{0.5 \omega_0^2 \Delta t^2}{2} \right] & 1 - \frac{0.5 \omega_0^2 \Delta t^2}{2} \end{bmatrix}$$

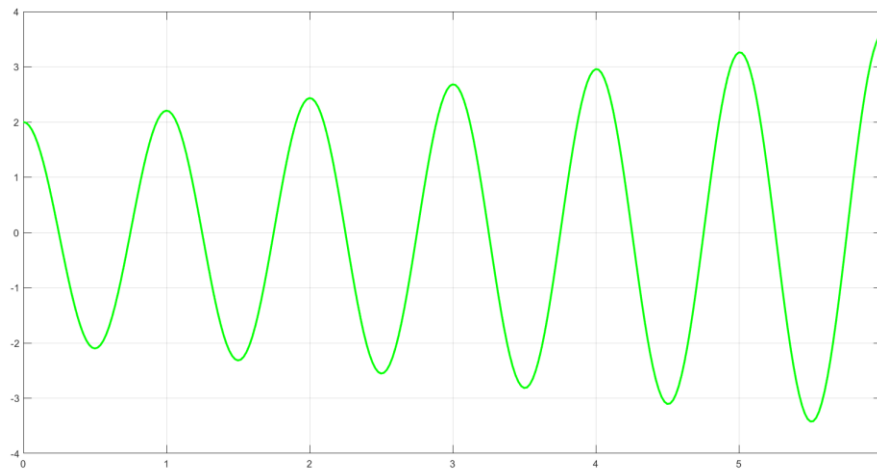
1.2 La résolution de l'équation différentielle (2) avec un schéma de NEWMARK explicite :

```
clear all
clc;
dt1 = 0.02;
```

```

T0 = 6;
w0 = 2*pi;
q0 = 2;
dq0 = 0;
a = 0.1;
w0c = w0*w0;
t1 = (0:dt1:T0)';
np1 = size(t1,1);
q1 = zeros(np1,1);
dq1 = zeros(np1,1);
q1(1) = q0;
dq1(1) = dq0;
for inc = 2 : np1
q1(inc) = q1(inc-1)*(1-0.5*w0c*dt1*dt1) + dt1*dq1(inc-1);
dq1(inc) = q1(inc-1)*w0c*dt1*(0.25*w0c*dt1*dt1-1) + dq1(inc-1)*(1-0.25*w0c*dt1*dt1);
end
plot (t1,q1, '-g','Linewidth',2)
grid on

```



1.3 On choisit $\Delta t = 0.02$ s. Les valeurs numériques de $q(t)$ pour les valeurs de t égales à 0 s, Δt , $2\Delta t$ et T_0 est

$$\begin{aligned}
q_{t=0} &= 2 \\
q_{t=\Delta t} &= 1.9842 \\
q_{t=2\Delta t} &= 1.9371 \\
q_{t=T_0} &= 3.5927
\end{aligned}$$

2. Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite

2.1 On doit chercher à minimiser la correction entre la valeur exact et la valeur estimée.

2.2 Calcul de la correction :

$$f(\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}, q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}) = 0$$

$$\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}^{\ddot{}} + \omega_0^2 (q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}) (1 + a(q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1})^2) = 0$$

$$f(\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}, q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}) = 0 = f(\ddot{q}_{j+1}^*, q_{j+1}^*) + \frac{\partial f}{\partial q_{j+1}^*} \Delta q_{j+1} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{q}_{j+1}^*} \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}$$

avec $\Delta q_{j+1} = \beta \Delta t^2 \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}$

on obtient que

$$\Delta q_{j+1}^{\ddot{}} = - \frac{f(\ddot{q}_{j+1}^*, \dot{q}_{j+1}^*, q_{j+1}^*)}{\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}_{j+1}^*} + 0.25 \frac{\partial f}{\partial q_{j+1}^*} \Delta t^2}$$

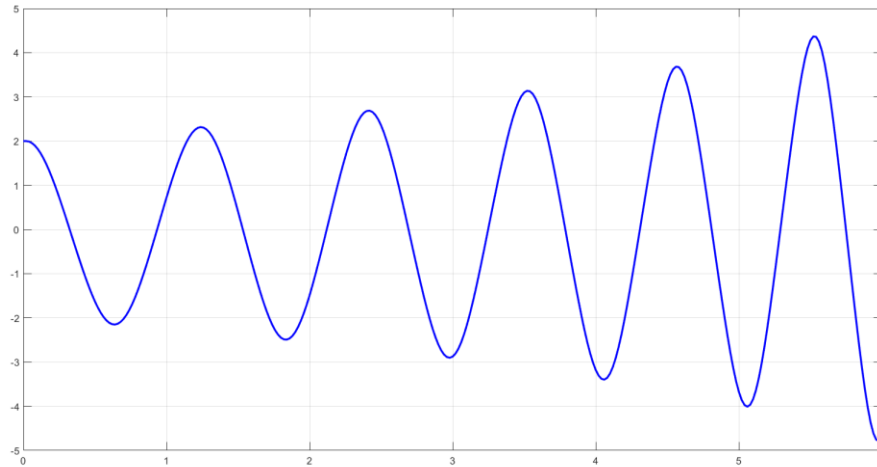
2.3 On a $\ddot{q}_{j+1}^0 = 0$

$$\dot{q}_{j+1}^0 = \dot{q}_j + 0.5 \Delta t \ddot{q}_j$$

$$q_{j+1}^0 = q_j + \Delta t \dot{q}_j + 0.25 \Delta t^2 \ddot{q}_j$$

```
clear all
clc;
dt2 = 0.02;
T0 = 6 ;
q0 = 2;
dq0=0 ;
a = 0.1;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t2 = (0:dt2:T0)';
np2 = size(t2,1);
q2 = zeros(np2,1);
dq2 = zeros(np2,1);
q2(1) = q0;
dq2(1) = dq0;
ddq2(1) = 0;
for inc = 2 : np2
q2(inc) = q2(inc-1)+dt2*dq2(inc-1)+0.25*dt2*dt2*ddq2(inc-1);
dq2(inc) = dq2(inc-1)+0.5*dt2*ddq2(inc-1);
ddq2(inc) = -w0c*q2(inc)*(1+a*q2(inc)*q2(inc));
end
```

```
plot(t2,q2,'b-','Linewidth',2)
grid on
```



2.4 On choisit $\Delta t = 0.02$ s. Les valeurs numériques de $q(t)$ pour les valeurs de t égales à 0 s , Δt , $2\Delta t$ et T_0 est

$$\begin{aligned} q_{t=0} &= 2 \\ q_{t=\Delta t} &= 1.9889 \\ q_{t=2\Delta t} &= 1.9559 \\ q_{t=T_0} &= -4.6870 \end{aligned}$$

3. Energie mécanique

3.1 On définit l'énergie mécanique pour cet oscillateur non linéaire

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k q^2 - kq(1 + aq^2) \\ E &= m \left(-\frac{k}{m} a q^3 + \frac{k}{m} \frac{q^2}{2} - \frac{k}{m} q + \frac{1}{2} q^2 \right) \end{aligned}$$

Car $\frac{k}{m} = \omega_0$

Donc

$$E = m \left(-\omega_0 a q^3 + \omega_0 \frac{q^2}{2} - \omega_0 q + \frac{1}{2} q^2 \right)$$

On pose que $E^* = \frac{E}{m}$

Alors

$$E^* = -\omega_0 a q^3 + \omega_0 \frac{q^2}{2} - \omega_0 q + \frac{1}{2} q^2$$

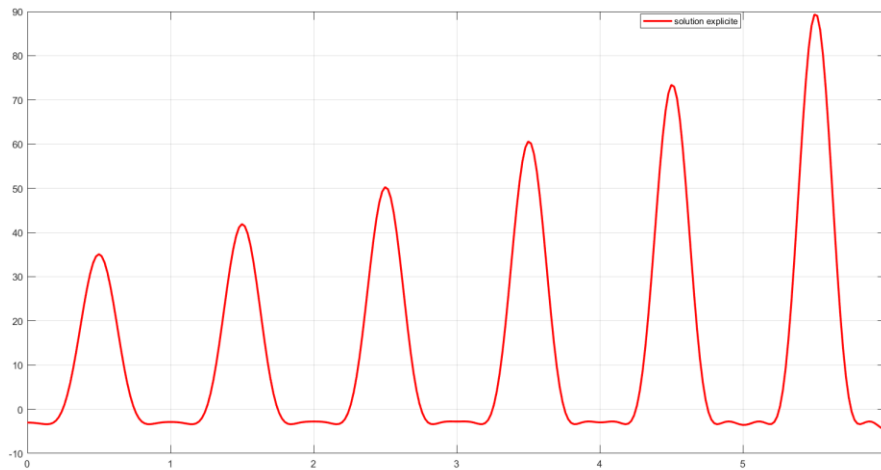
3.2 Programmez le calcul de cette énergie mécanique pour les deux schémas d'intégration :

```

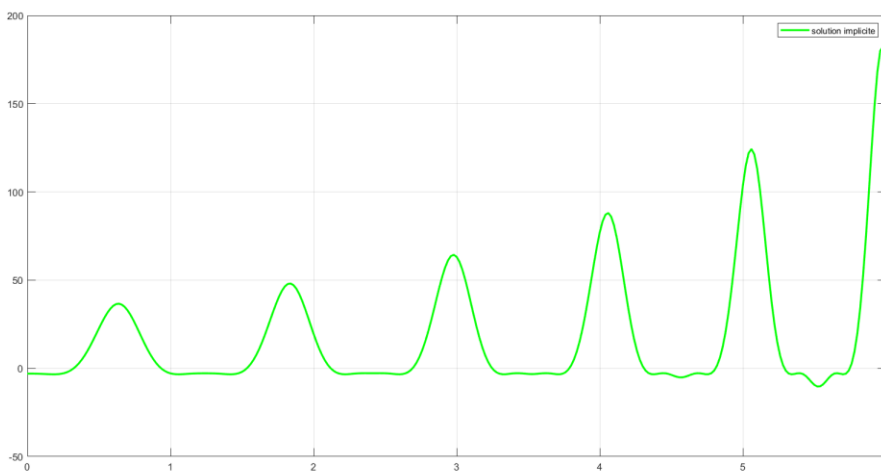
energ1 = -w0*a*(q1).^3+w0*0.5*(q1).^2-w0*q1+0.5*(q1).^2;
plot(t1,energ1,'r-','Linewidth',2)
legend('solution exacte');

```

Solution explicite :



Solution implicite :



3.3 Les deux résultats sont croissant, c'est-à-dire que les énergie mécanique du système de oscillateur non linéaire à un degré de liberté devient de plus en plus grand. Et le résultat implicite augmente plus rapidement que la solution explicite.