

1. 1.1 $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \omega_0 = 2\pi, q_0 = 1, \dot{q}_0 = 0, T_0 = 3s$

On a $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

donc $\lambda = \omega_0 i$ ou $\lambda = -\omega_0 i$

donc $q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$

on a $q_0 = C_1 = 1, \dot{q}_0 = \omega_0 C_2 = 0$

donc $q = \cos \omega_0 t = \cos 2\pi t$

1.2 $E^* = \frac{1}{2} [4\pi^2 \sin^2(2\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi t)] = 2\pi^2$

On peut trouver que E^* est une constant, sa valeur est $2\pi^2$

2. 2.1 $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t * \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 q_j \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} q_j + \Delta t \dot{q}_j \\ \dot{q}_j - \omega_0^2 \Delta t q_j \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} q_j + \Delta t \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 \Delta t q_j + \dot{q}_j \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2.2 Pour obtenir la solution exacte, les codes sont comme suit:

```
clear all; close all ; clc
T0 = 3 ; w0 = 2 * pi ; w0c = w0 * w0 ;
q0 = 1. ; dq0 = 0.0 ; dte = 0.01 ;
te = (0:dte:T0)' ;
npe = size(te,1) ;
qe = zeros(npe,1) ;
dqe = zeros(npe,1) ;
energe = zeros(npe,1);
tic;
qe = q0 * cos(w0 * te) + dq0/w0 * sin(w0 * te) ;
dqe = -w0 * q0 * sin(w0 * te) + dq0 * cos(w0 * te) ;
ddqe = - w0c * qe;
energe = 0.5*(dqe .* dqe + w0c * (qe.^2)) ; toc;
plot(te,qe,te, dqe,te, ddqe, '-r','Linewidth',2)
plot(qe,dqe,qe, ddqe, '-r','Linewidth',2)
plot(qe,ddqe, '-r','Linewidth',2)
plot(te,qe, '-r','Linewidth',2)
```

Pour obtenir la solution a l'aide d'un sch'ema d'EULER explicite, les codes sont comme suit:

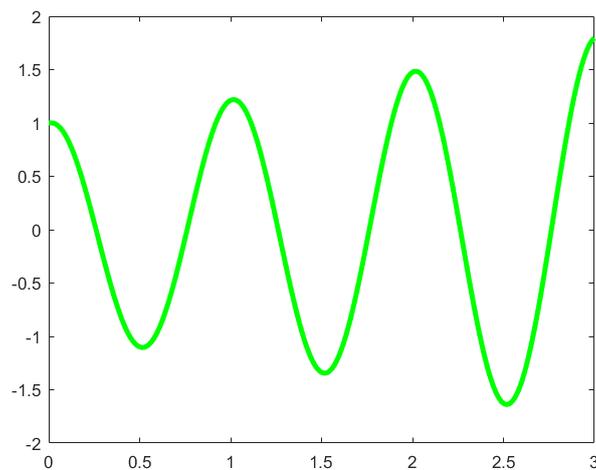
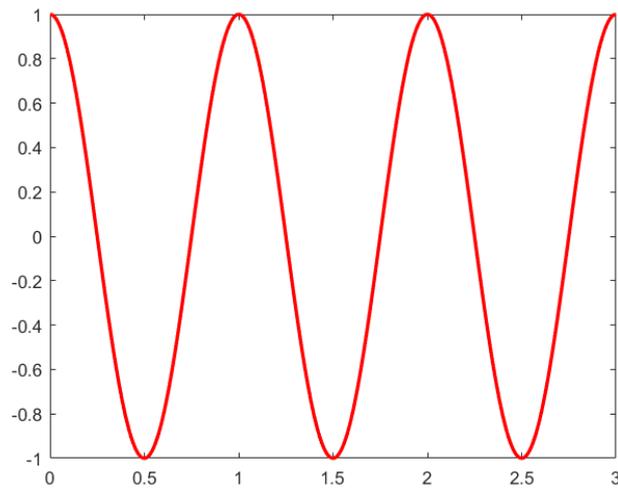
```
dt1 = 0.01;T0=3;
t1 = (0:dt1:T0)'
np1 = size(t1,1)
q1 = zeros(np1,1)
```

```

dq1 = zeros(np1,1) ;
ddq1 = zeros(np1,1) ;
energ1 = zeros(np1,1);
q1(1) = q0
dq1(1) = dq0
for inc = 2 : np1 ;
    q1(inc) = q1(inc-1) + dt1 * dq1(inc-1) ;
    dq1(inc) = dq1(inc-1) + dt1* ddq1(inc-1) ;
    ddq1(inc) = -w0c * q1(inc) ;
end;
energ1 = 0.5*(dq1 .* dq1 + w0c * (q1.^2))
plot(t1,q1,'g-', 'Linewidth',3)

```

2.3 la solution exacte et la solution d'EULER explicite sont comme suit :



On peut voir que la solution d'EULER explicite est divergente. Quand Δt est plus grand, plus la divergence est lente.

2.4 E^* est divergente, quand Δt est plus grand, E^* est plus grande, quand $t = 0$, $E^* = 2\pi^2$, quand $t > 0$, E^* est croissante.

2.5 les codes sont comme suite :

```
t1 = (0:dt1:T0)' ; np1 = size(t1,1);
q = [q0;dq0] ;
q1b = zeros(np1,1) ;
q1b(1) = q0 ;
A = [1 , dt1 ; -w0c * dt1 , 1] ;
for inc = 2 : np1 ;
    q = A * q ;
    q1b(inc) = q(1) ;
    dq1b(inc) = q(2) ;
end;
plot(t1,q1b,'b-','Linewidth',3)
plot(dq1b,q1b,'b-','Linewidth',3)
dt1= sym('dt1','real'); w0= sym('w0','real');
A = [1 , dt1 ; -1 * w0 * w0 * dt1 , 1]
% Z : vecteurs et valeurs propres : d
[z,d]=eig(A); z ; d
re = real(d)
im = imag(d)
mo=abs(d)
zm= inv(z) ; C= z * (d * zm); C = simplify(C)
```

les values propres:

```
d=
[ 1 - dt1*w0*1i,          0]
[          0, 1 + dt1*w0*1i]
```

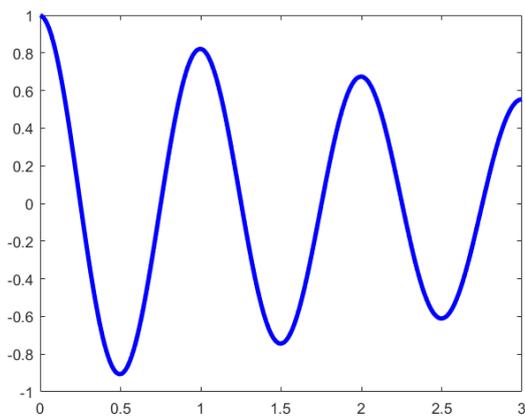
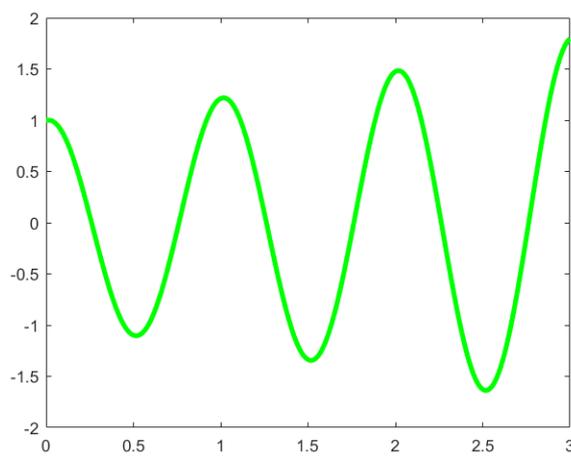
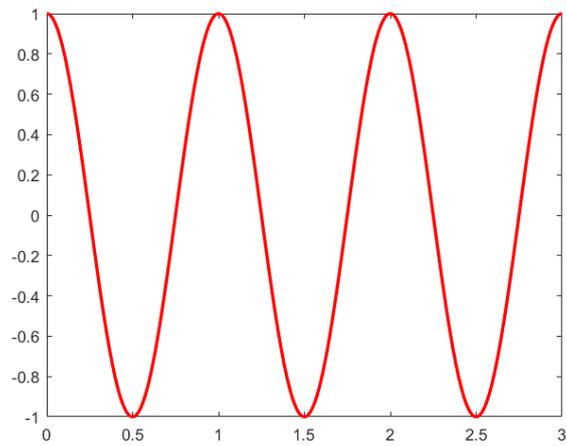
Parce que $|\lambda_i| > 1$, donc le schéma d'EULER explicite est inconditionnellement instable.

3. 3.1 les codes sont comme suite :

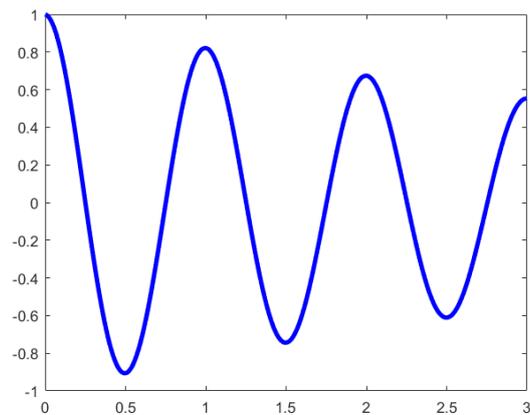
```
dt2 = 0.01;T0=3;
t2 = (0:dt2:T0)'
np2 = size(t2,1)
q2 = zeros(np2,1)
dq2 = zeros(np2,1) ;
energ2 = zeros(np2,1);
q2(1) = q0
dq2(1) = dq0
for inc = 2 : np2
    q2(inc) = (q2(inc-1) + dt2 * dq2(inc-1))/(1 + w0c * dt2 *
dt2)
```

```
ddqc = -w0c * q2(inc)
dq2(inc) = dq2(inc-1) + dt2 * ddqc
end
```

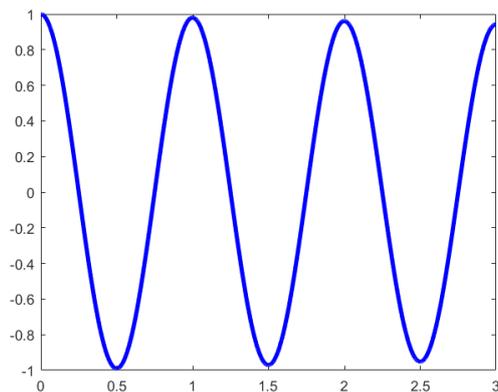
3.2 Quand $\Delta t = 0.01$, les 3 solutions s (solution exacte, EULER explicite et EULER implicite) sont comme suit:



3.3 Quand $\Delta t = 0.001$, l'atténuation des oscillations est plus faible que celui de $\Delta t = 0.01$, les 2 solutions sont comme suit :



$\Delta t = 0.01$



$\Delta t = 0.001$

Donc plus le pas de temps Δt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

3.4 Pour la solution exacte, $E^* = 2\pi^2$, est une constante,

Pour la solution d'un schéma d'EULER explicite, quand $t=0$, $E^* = 2\pi^2$, quand $t > 0$, E^* est croissante.

Pour la solution d'un schéma d'EULER implicite, quand $t=0$, $E^* = 2\pi^2$, quand $t > 0$, E^* est décroissante.

3.5 les codes de calculer les valeurs propres sont comme suit :

```
clear all; close all; clc;
dt1= sym('dt1','real');
w0= sym('w0','real');
A = [1 , -dt1 , 0 ; 0 , 1 , -dt1; w0 * w0, 0 , 1]
B = [1 , 0 , 0 ; 0 , 1, 0; 0, 0 , 0]
C= A\B
% identique C = inv(A) * B
```

```

% Vecteurs et valeurs propres
[z,d] = eig(C) ; d ;
simplify(d)
mo=abs(d)
% module <1 ? Oui schéma inconditionnellement stable
eval(mo)

```

les valeur propres :

```

mo =
[ 0, 0, 0]
[ 0, 1/abs(dt1*w0 + 1i), 0]
[ 0, 0, 1/abs(1 + dt1*w0*1i)]

```

Parce que $|\lambda_i| < 1$, donc le schéma d'EULER implicite est inconditionnellement stable.

4. 4.1 On a $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$,

On pose que $\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = \dot{q} \end{cases}$

Alors $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 \end{cases}$

Donc on a $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

4.2 On programme la résolution de l'équation du mouvement que on a obtenue à l'aide d'un schéma de RUNGE KUTTA.

```

clear all
clc;
T0=3;
q0 =1;
dq0=0;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
dt3 = 0.01;
t3 = (0:dt3:T0)';
np3 = size(t3,1);
q3 = zeros(np3,1);
dq3 = zeros(np3,1);
energ3 = zeros(np3,1);
q3(1) = q0;
dq3(1) = dq0;
qj = [q0 ; dq0];
C = [0 1; -w0c 0];
for inc = 2 : np3
    k1 = C*qj;
    k2 = C*(qj+k1*dt3/2);
    k3 = C*(qj+k2*dt3/2);
    k4 = C*(qj+k3*dt3);

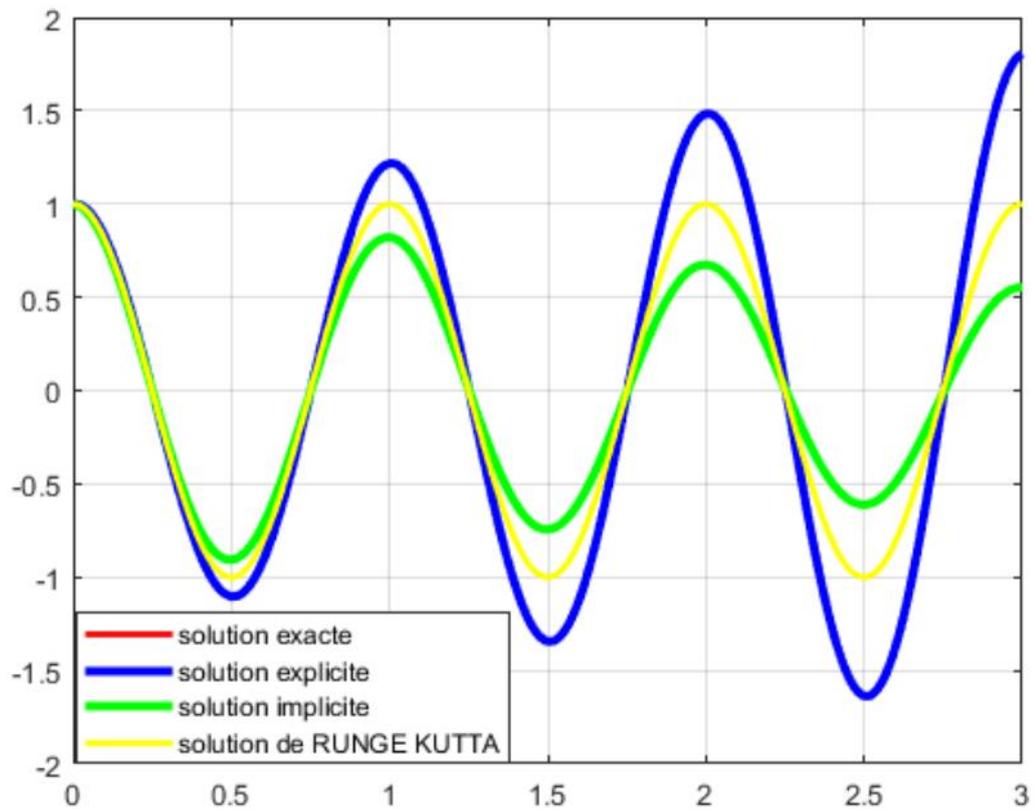
```

```

K = (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
qj = qj + K * dt3;
q3(inc) = qj(1);
dq3(inc) = qj(2);
end
energ3 = 0.5*(dq3 .* dq3 + w0c * (q3.^2));
plot(t3,q3, '-r','Linewidth',2)
plot(t3,energ3,'b-', 'Linewidth',3)

```

4.3 Comparer les valeurs de la solution $q(t)$ obtenues avec un schéma de RUNGE KUTTA avec celles calculées précédentes (solution exacte, schéma d'EULER explicite et schéma d'EULER implicite), on peut trouver que la solution de schéma d'EULER explicite est plus grande que la solution exacte, la solution de schéma d'EULER implicite est plus petite que la solution exacte et ils sont divergents. Mais la solution de schéma de RUNGE KUTTA est presque la même avec la solution exacte.



4.4 On Calcule la quantité E^* associée au schéma de RUNGE KUTTA et compare les valeurs obtenues avec celles calculées à l'aide de la solution exacte, d'un schéma d'EULER explicite et d'un schéma d'EULER implicite. On peut trouver que la solution du schéma de RUNGE KUTTA a la même de quantité avec la solution exacte.