

**Retrouver l'équation du mouvement du pendule :**

$$E_c = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2$$

$$E_p = -mgdcos\theta + cte$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[ \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + mgdcos\theta - cte \right] = I\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = I\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + mgdcos\theta - cte \right] = -mgdsin\theta$$

Car  $\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial E}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial E}{\partial x_i} = 0$

$$I\ddot{\theta} + mgdsin\theta = 0$$

Par l'hypothèse de petit mouvement  $sin\theta = \theta$

On a

$$I\ddot{\theta} + mgd\theta = 0$$

**Montrer que le schéma explicite avec matrice d'amplification est obtenu à partir du système du premier ordre que l'on discrétise en temps de manière explicite.**

On a relation d'Euler Explicite

$$\begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{bmatrix}$$

Et

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Donc

$$\ddot{q}_{j+1} + \omega_0^2 q_{j+1} = 0$$

$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 q_{j+1}$$

Car

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t \ddot{q}_j$$

Alors

$$\ddot{q}_j = -\omega_0^2 q_j$$

Donc

$$\dot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 \Delta t q_j + \dot{q}_j$$

Car on a

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j$$

Donc on obtient que

$$\begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

## Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

1.1 Equation (1) :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

On pose que

$$q = \exp(\lambda t)$$

alors

$$(\lambda^2 + \omega_0^2) \exp(\lambda t) = 0$$

donc on a

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

parce que

$$0 - 4 \times 1 \times \omega_0^2 < 0$$

donc la solution d'équation caractéristique est

$$\lambda_1 = \omega_0 i, \lambda_2 = -\omega_0 i$$

donc

$$q = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

on a alors

$$\dot{q} = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

d'après la condition initiale (4), on a

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 0 = \omega_0 C_2 \end{cases}$$

donc on a

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

La solution d'équation (1) est

$$q = \cos(2\pi t)$$

Programer la solution :

```
clear all;
close all;
clc;
T0 = 3;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
q0 = 1;
dq0 = 0;
dte = 0.01
te = (0:dte:T0) ; % t=0:dte:3;
tic;
ind = 1;
for t= te
q(ind) = q0 * cos(w0 * t) + dq0/w0 * sin(w0 * t) ;
```

```

dq(ind) = -w0 * q0 * sin(w0 * t) + dq0 * cos(w0 * t) ;
ddq(ind) = - w0c * q(ind) ;
energe(ind) = 0.5*( dq(ind)* dq(ind) + w0c *(q(ind)^2));
ind = ind+1;
end ; toc;
q= q';
plot(te,q,te, dq,te, ddq, '-r', 'Linewidth',2)
plot(q,dq,q, ddq, '-r', 'Linewidth',2)
plot(q,ddq, '-r', 'Linewidth',2)
plot(te,q, '-r', 'Linewidth',2)
grid on;

```

1.2 On a

$$E^* = \frac{1}{2}(\dot{q} + \omega_0^2 q^2)$$

$$q = \cos(2\pi t)$$

$$\dot{q} = -2\pi \sin(2\pi t)$$

alors on peut obtenir que

$$E^* = \frac{1}{2}(4\pi^2 \sin^2(2\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi t)) = 2\pi^2$$

La valeur de  $E^*$  est un constant.

2.1 On a relation (1)

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

et relation (5)

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ q_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \times \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 q_j \end{vmatrix}$$

On peut calculer que

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \times \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ -\omega_0^2 q_j \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix}$$

2.2 Programmez la résolution de l'équation (1) à l'aide d'un schéma d'EULER explicite :

méthode 1 : sans la matrice d'amplification

```

clear all
dt1 = 0.01;
T0=3 ;
q0 =1;
dq0=0;

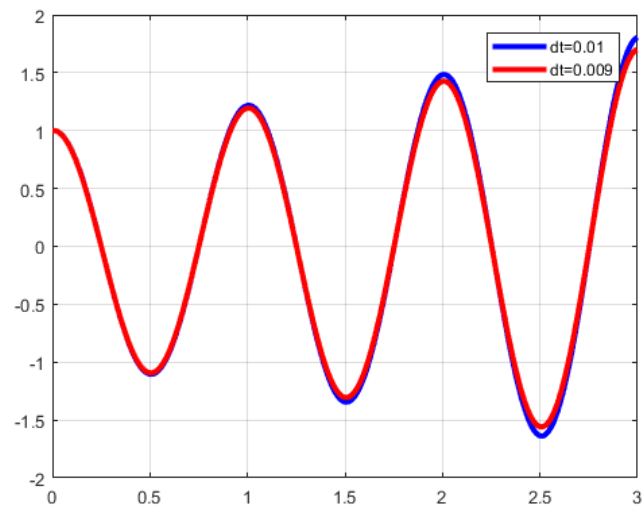
```

```
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t1 = (0:dt1:T0)';
np1 = size(t1,1);
q1 = zeros(np1,1);
dq1 = zeros(np1,1);
ddq1 = zeros(np1,1);
energ1 = zeros(np1,1);
q1(1) = q0;
dq1(1) = dq0;
ddq1(1) = -w0c * q1(1);
for inc = 2 : np1;
q1(inc) = q1(inc-1) + dt1 * dq1(inc-1);
dq1(inc) = dq1(inc-1) + dt1 * ddq1(inc-1);
ddq1(inc) = -w0c * q1(inc);
end;
energ1 = 0.5*(dq1 .* dq1 + w0c * (q1 .^2));
plot(t1,q1,'b-', 'Linewidth',3);
```

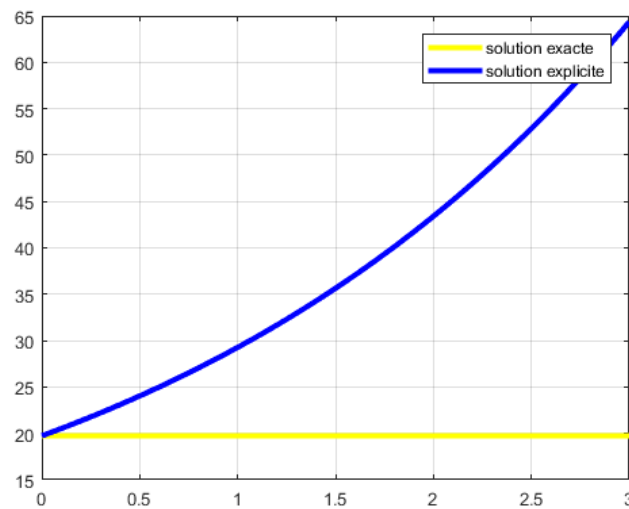
## méthode 2 : avec la matrice d'amplification

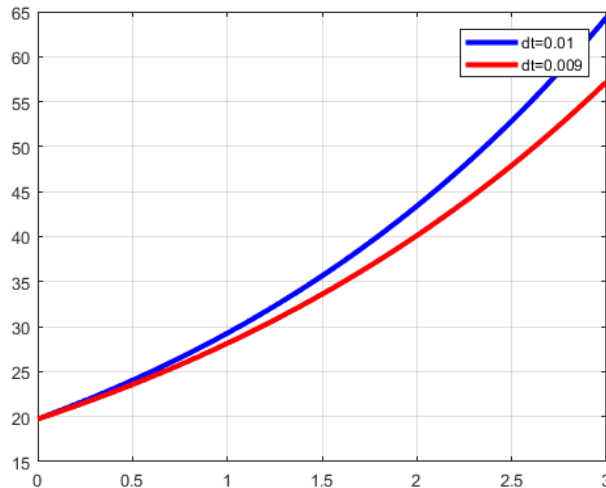
```
clear all
dt1 = 0.01;
T0=3 ;
q0 =1;
dq0=0;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t1 = (0:dt1:T0)';
np1 = size(t1,1);
q = [q0;dq0];
q1b = zeros(np1,1) ;
q1b(1) = q0 ;
A = [1 , dt1 ; -w0c * dt1 , 1];
for inc = 2 : np1;
q = A * q ;
q1b(inc) = q(1);
dq1b(inc) = q(2);
end;
plot(t1,q1b,'b-', 'Linewidth',3)
plot(dq1b,q1b,'b-', 'Linewidth',3);
```

2.3 On change le pas de temps pour que le premier linge est 0.01, et le second ligne est 0.009, alors on peut trouver que plus le pas de temps est petit, plus la divergence est lente.



2.4 La quantité  $E^*$  associée au schéma d'EULER explicite est plus grand que les valeurs obtenues avec celles calculées à partir de la solution exacte. Et plus le pas de temps est petit, plus la quantité  $E^*$  est augmente lentement.





2.5 On va calculer numériquement les valeurs propres de la matrice d'amplification en fonction du pas de temps  $\Delta t$

```
dt1= sym('dt1', 'real'); w0= sym('w0', 'real');
A = [1 , dt1 ; -1 * w0 * w0 * dt1 , 1]
% Z : vecteurs et valeurs propres : d
[z,d]=eig(A)
re = real(d)
im = imag(d)
mo=abs(d)
% module >1 ? Oui schéma inconditionnellement stable
zm= inv(z);
C= z * (d * zm);
C = simplify(C)
%vérifier la correction de calculer
```

Alors on obtient que les valeurs propres

$$d = \begin{bmatrix} 1 - \omega_0 i \Delta t & 0 \\ 0 & 1 + i \Delta t \end{bmatrix}$$

$$mo = \begin{bmatrix} |1 - \omega_0 i \Delta t| & 0 \\ 0 & |1 + i \Delta t| \end{bmatrix} \text{ avec module de } mo > 1$$

Donc le caractère inconditionnellement instable du schéma d'EULER explicite.

3.1 Programmez la résolution de l'équation (1) à l'aide d'un schéma d'EULER implicite :

méthode 1 : sans la matrice d'amplification

```
clear all
```

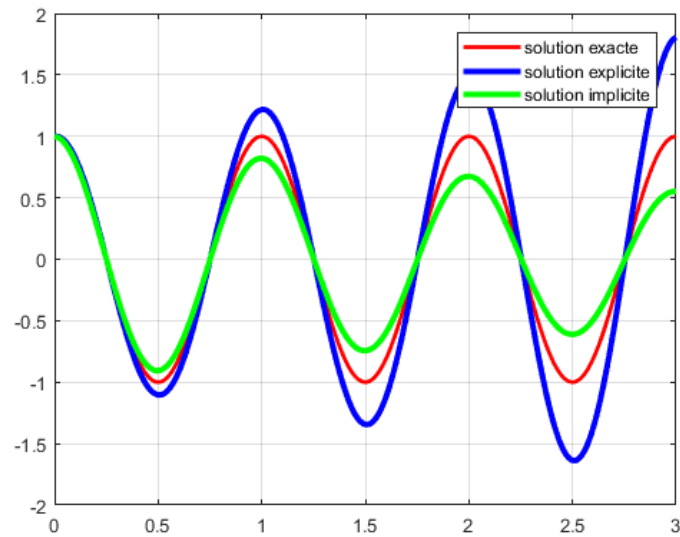
```
dt2 = 0.01;
T0=3 ;
q0 =1;
dq0=0 ;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t2 = (0:dt2:T0)';
np2 = size(t2,1);
q2 = zeros(np2,1);
dq2 = zeros(np2,1);
energ2 = zeros(np2,1);
q2(1) = q0;
dq2(1) = dq0;
for inc = 2 : np2
q2(inc) = (q2(inc-1) + dt2 * dq2(inc-1))/(1 + w0c * dt2 * dt2);
ddqc = -w0c * q2(inc);
dq2(inc) = dq2(inc-1) + dt2 * ddqc;
end
energ2 = 0.5*(dq2 .* dq2 + w0c * (q2.^2));
plot(t2,q2,'b-', 'Linewidth',3)
grid on
```

## méthode 2 : avec la matrice d'amplification

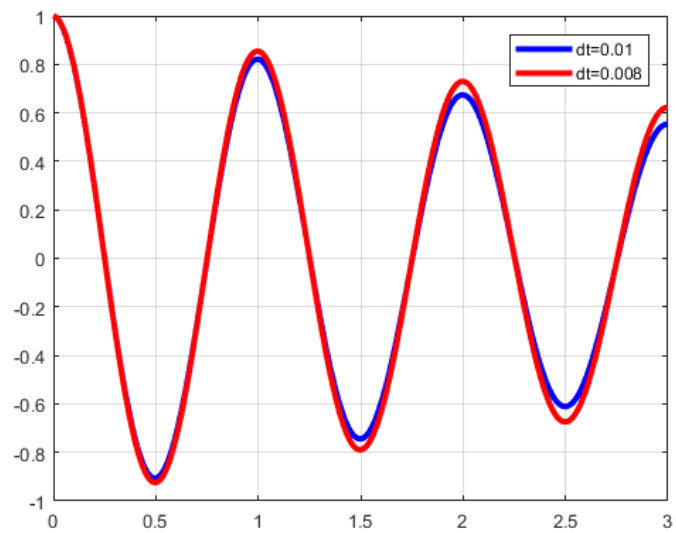
```
clear all
dt2 = 0.01;
T0=3 ;
q0 =1;
dq0=0 ;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t2 = (0:dt2:T0)';
np2 = size(t2,1);
q = [q0;dq0];
q2b = zeros(np2,1);
dq2b = zeros(np2,1);
q2b(1) = q0;
dq2b(1) = dq0;
A = [1 , dt2 ; -w0c * dt2 , 1];
A = A / (1 + w0c * dt2 * dt2);
for inc = 2 : np2
q = A * q;
q2b(inc) = q(1);
dq2b(inc) = q(2);
```

```
end;
energ2m = 0.5*(dq2b .* dq2b+ w0c * (q2b .^2));
plot(t2,q2b, 'b-', 'Linewidth', 3)
```

3.2 Les valeurs de q obtient par les trois méthodes sont comme la suite :

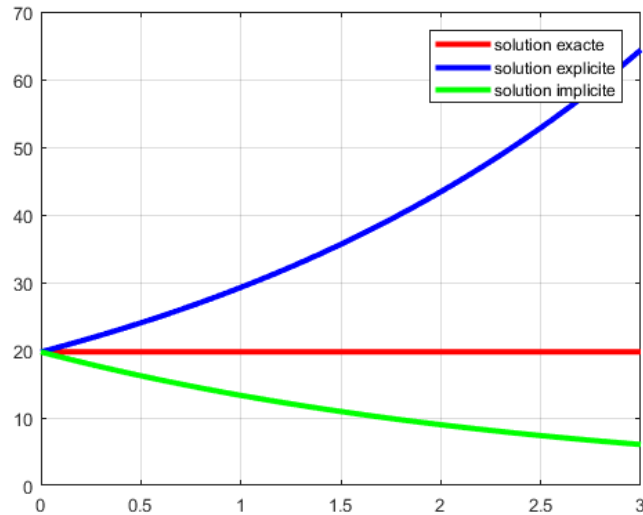


3.3 En testant différents pas de temps, On peut remarquer que plus le pas de temps est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

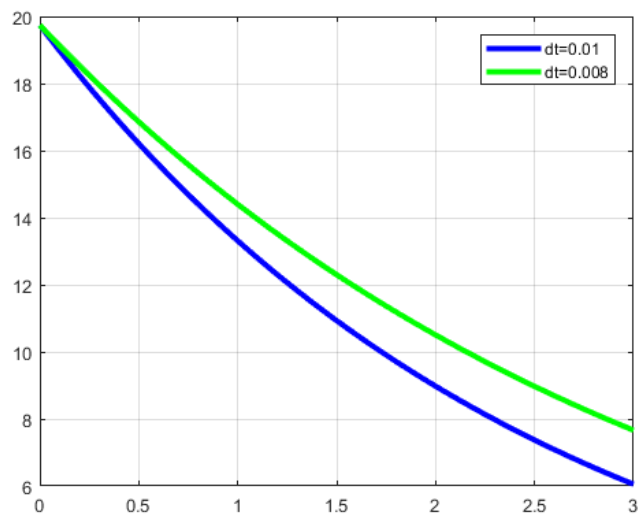




3.4 La quantité  $E^*$  associée au schéma d'EULER implicite et les valeurs obtenues avec celles calculées précédemment à l'aide de la solution exacte et d'un schéma d'EULER explicite sont comme la suite. On peut trouver que La quantité  $E^*$  associée au schéma d'EULER implicite diminue et La quantité  $E^*$  associée au schéma d'EULER explicite augmente.



Quand on change le pas de temps, on peut trouver que plus le pas de temps est petit, plus la divergence est lente.



3.5 En d'eterminant numériquement les valeurs propres de la matrice d'amplification en fonction du pas de temps  $\Delta t$  du schéma d'EULER implicite.

```
close all;
clc;
dt1= sym('dt1','real');
w0= sym('w0','real');
A = [1 , -dt1 , 0 ; 0 , 1 , -dt1; w0 * w0, 0 , 1];
B = [1 , 0 , 0 ; 0 , 1, 0; 0, 0 , 0];
```

```

C= A\B;
% identique C = inv(A) * B
% Vecteurs et valeurs propres
[z,d] = eig(C)
simplify(d)
mo=abs(d)
% module <1 ? Oui schéma inconditionnellement stable
eval(mo)

```

On obtient que

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{\Delta t \omega_0 + i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t \omega_0 i + 1} \end{bmatrix}$$

$$mo = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|\Delta t \omega_0 + i|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{|\Delta t \omega_0 i + 1|} \end{bmatrix} \text{ avec module de } mo < 1$$

Donc le caractère inconditionnellement stable du schéma d'EULER implicite.

4.1 Equation de mouvement (1) :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

On pose que

$$\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = \dot{q} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 \end{cases}$$

Donc on a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

4.2 On programme la résolution de l'équation du mouvement que on a obtenue à la question 4.1 à l'aide d'un schéma de RUNGE KUTTA.

```

clear all
clc;
T0=3;
q0 =1;
dq0=0;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
dt3 = 0.01;
t3 = (0:dt3:T0)';

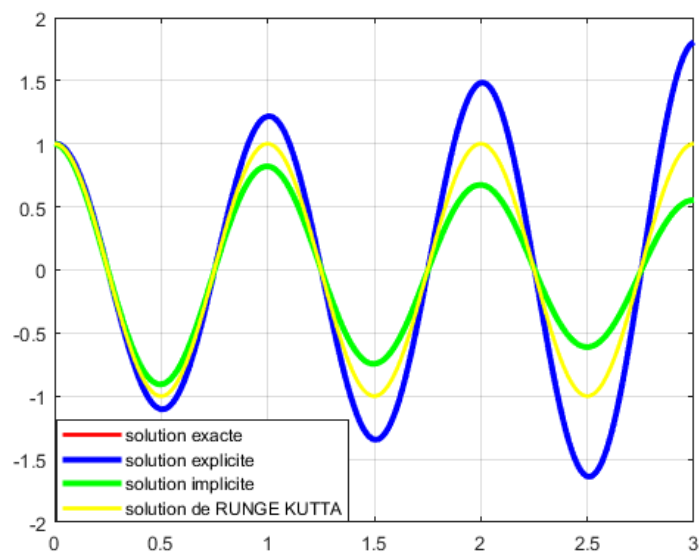
```

```

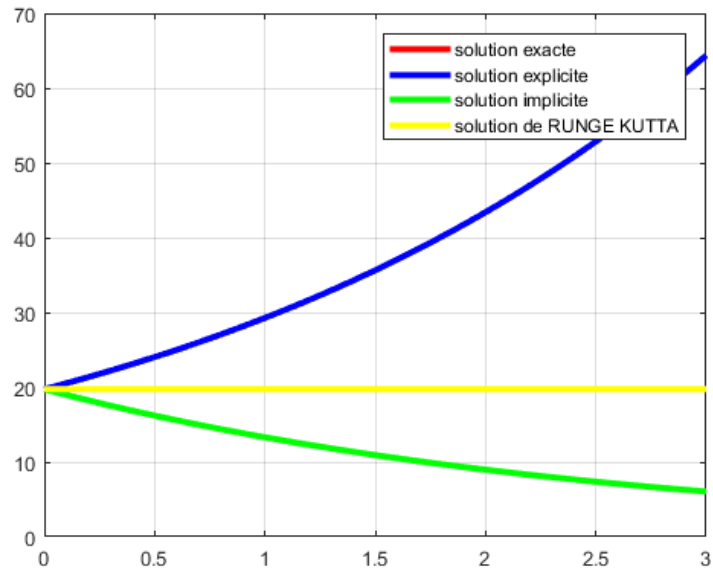
np3 = size(t3,1);
q3 = zeros(np3,1);
dq3 = zeros(np3,1);
energ3 = zeros(np3,1);
q3(1) = q0;
dq3(1) = dq0;
qj = [q0 ; dq0];
C = [0 1; -w0c 0];
for inc = 2 : np3
k1 = C*qj;
k2 = C*(qj+k1*dt3/2);
k3 = C*(qj+k2*dt3/2);
k4 = C*(qj+k3*dt3);
K = (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
qj = qj + K * dt3;
q3(inc) = qj(1);
dq3(inc) = qj(2);
end
energ3 = 0.5*(dq3 .* dq3 + w0c * (q3.^2));
plot(t3,q3, '-r', 'Linewidth',2)
plot(t3,energ3, 'r-', 'Linewidth',3)

```

4.3 Comparez les valeurs de la solution  $q(t)$  obtenues avec un schéma de RUNGE KUTTA avec celles calculées précédemment (solution exacte, schéma d'EULER explicite et schéma d'EULER implicite), on peut trouver que la solution de schéma d'EULER explicite est plus grand que la solution exacte et la solution de schéma d'EULER implicite est plus petit que la solution exacte et ils sont divergents. Mais la solution de schéma de RUNGE KUTTA est presque la même avec la solution exacte.



4.4 On calcule la quantité  $E^*$  associée au schéma de RUNGE KUTTA et comparez les valeurs obtenues avec celles calculées à l'aide de la solution exacte, d'un schéma d'EULER explicite et d'un schéma d'EULER implicite. On peut trouver que la solution du schéma de RUNGE KUTTA a la même de quantité avec la solution exacte, mais la solution d'un schéma d'EULER explicite et d'un schéma d'EULER implicite sont pas précises.



## Étude d'un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté

### 1.1) Résolution avec un schéma d'EULER explicite

On va résoudre le problème par un schéma d'EULER explicite

```
omega=2*pi;
epsilon=0.02;
OMEGA=omega*(1-epsilon^2)^(0.5);
deltaT=2*epsilon/omega;
T0=1;
x=0.01;
xd=0;

% Euler Explicite
A1=[1 deltaT;-omega^2*deltaT 1-2*epsilon*omega*deltaT];
U=[x;xd];
Y1=[];
for j=1:(10*T0/deltaT)
    Y1(j)=U(1);
    U=A1*U;
end
abs(eig(A1))
J=linspace(0,10*T0,10*T0/deltaT);
Y0=(exp(-
epsilon*omega*J)).*(x*cos(OMEGA*J)+(epsilon*omega*x+xd)*(sin(OMEGA*J))/OMEGA);

deltaT2=1.5*deltaT;
deltaT3=0.05*deltaT;
A2=[1 deltaT2;-omega^2*deltaT2 1-2*epsilon*omega*deltaT2];
U=[x;xd];
Y2=[];

for j=1:(10*T0/deltaT2)
    Y2(j)=U(1);
    U=A2*U;
end

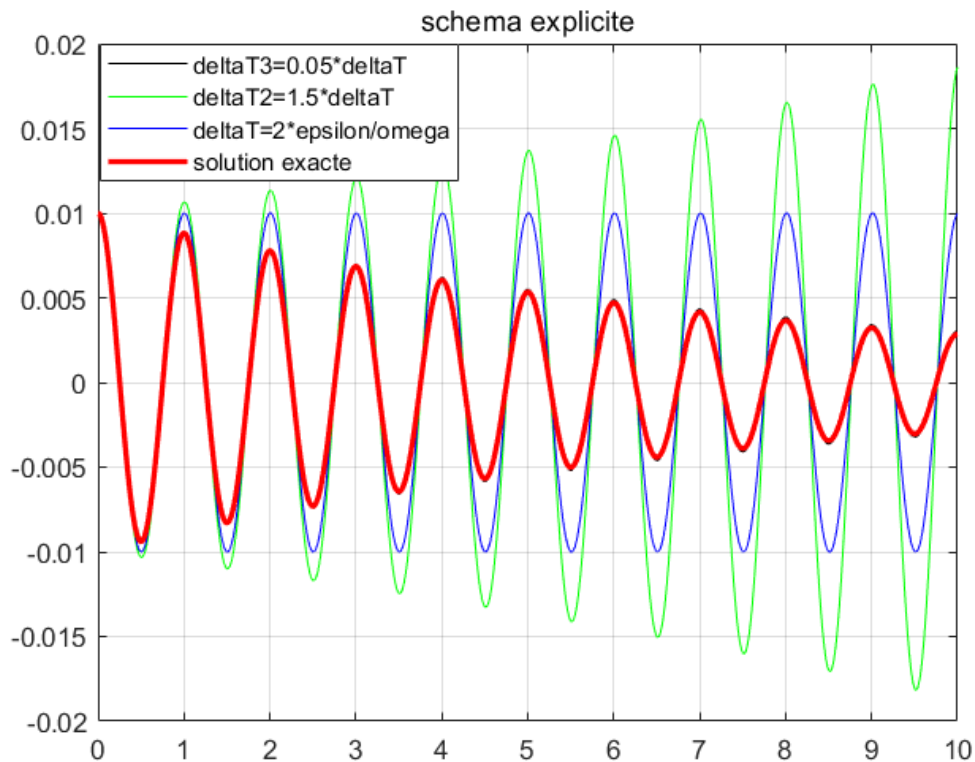
A3=[1 deltaT3;-omega^2*deltaT3 1-2*epsilon*omega*deltaT3];
U=[x;xd];
Y3=[];
for j=1:(10*T0/deltaT3)
    Y3(j)=U(1);
```

```

U=A3*U;
end
K=linspace(0,10*T0,10*T0/deltaT2);
L=linspace(0,10*T0,10*T0/deltaT3);
figure(1)
plot(L,Y3,'k'); hold on
plot(K,Y2,'g'); hold on
plot(J,Y1,'b'); hold on
plot(J,Y0,'r','Linewidth',2);
title('schema explicite');
legend('deltaT3=0.05*deltaT','deltaT2=1.5*deltaT','deltaT=2*epsil
on/omega','solution exacte');
grid on

```

alors on peut obtenir le résultats suivante



1.1a) Si on choisit

$$\Delta t > \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

La solution explicite est plus grand que la solution exacte, et il est divergente. La solution est croissante.

1.1b) Si on choisit

$$\Delta t = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

La solution explicite est plus grand que la solution exacte, et il est constante.

1.1c) Si on choisit

$$\Delta t < \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

La solution explicite est plus grand que la solution exacte, et il est divergente. La solution est décroissant, mais il est toujours grand que la solution exacte.

1.1d)- Les critères permettant d'étudier la précision de la solution :

$$\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 - 2\varepsilon \omega_0 \Delta t \end{bmatrix} = A$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$0 < \varepsilon < 1$$

donc on a

$$\lambda = 1 - \varepsilon \omega_0 \Delta t \pm i \omega_0 \Delta t [1 - \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}$$

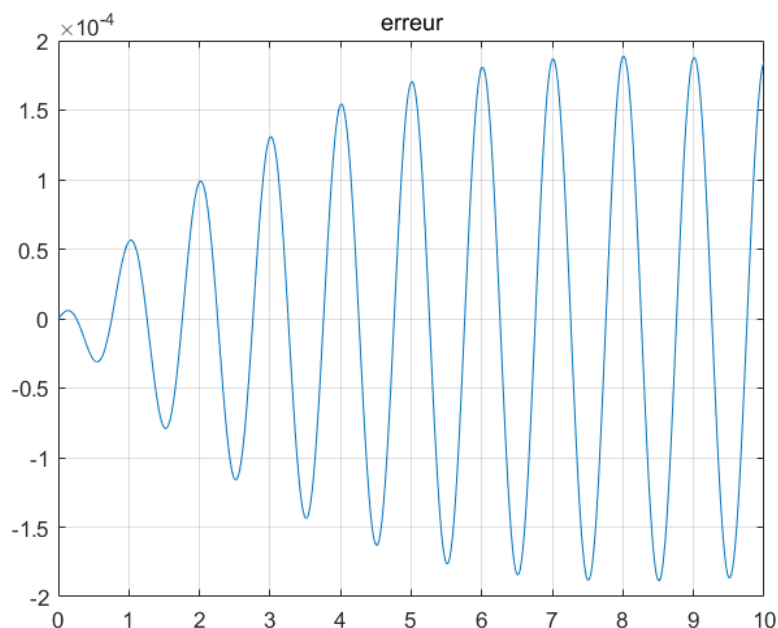
alors que  $|\lambda| < 1$

donc

$$\Delta t < \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

- Quand  $\frac{\Delta t}{\frac{2\varepsilon}{\omega_0}} \leq 0.05$ , la solution calculée présente-t-elle une précision suffisante.

```
% abs(xexplicit-x)<gamma, gamma est l'ordre de la précision
Y30=(exp(epsilon*omega*L) ).*(x*cos(OMEGA*L)+(epsilon*omega*x+xd)*
(sin(OMEGA*L))/OMEGA);
figure(2)
plot(L,(Y3-Y30));
title('erreur');
grid on
```



## 1.2) Résolution avec un schéma d'EULER implicite

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \Delta t \dot{x}_{n+1} \\
 \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + \Delta t \ddot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \Delta t (-2\varepsilon\omega_0 \dot{x}_{n+1} - \omega_0^2 x_{n+1}) \\
 \ddot{x}_n &= -2\varepsilon\omega_0 \dot{x}_n - \omega_0^2 x_n \\
 -\Delta t \dot{x}_{n+1} + x_{n+1} &= x_n \\
 (1 + 2\varepsilon\omega_0 \Delta t) \dot{x}_{n+1} + \omega_0^2 \Delta t x_{n+1} &= \dot{x}_n \\
 \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ \omega_0^2 \Delta t & 1 + 2\varepsilon\omega_0 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \\
 \det \left[ \text{inv} \left( \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ \omega_0^2 \Delta t & 1 + 2\varepsilon\omega_0 \Delta t \end{bmatrix} \right) - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] &= 0
 \end{aligned}$$

On souhaite que  $\Delta \leq 0$

Donc

$$\Delta t < \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

## 1.3) Résolution avec un schéma de RUNGE KUTTA

On évalue numériquement la solution de l'équation (21) sur l'intervalle de temps [ 0 100T0 ] avec un schéma de RUNGE KUTTA.

1.3.a) Calculer la solution obtenue pour les trois valeurs suivantes du coefficient h :

$$h = 0.04 \quad h = 0.96 \quad h = 1.04$$

```

clear all
clc;
w0 = 2*pi;
epsilon=0.02;
T0=1;
x0=0.01;
dx0=0;
w0c = w0*w0;
h1 = 0.04;
dt1=h1*2*sqrt(2)/w0;
t = (0:dt1:100*T0)';
np = size(t,1);
x1 = zeros(np,1);
dx1 = zeros(np,1);
x1(1) = x0;
dx1(1) = dx0;
xj = [x0 ; dx0];
A = [-1 1;0 w0c*dt1];
B = [0 dt1;1 -(1+2*epsilon*w0*dt1)];
C = inv(B)*A;
for inc = 2 : np

```

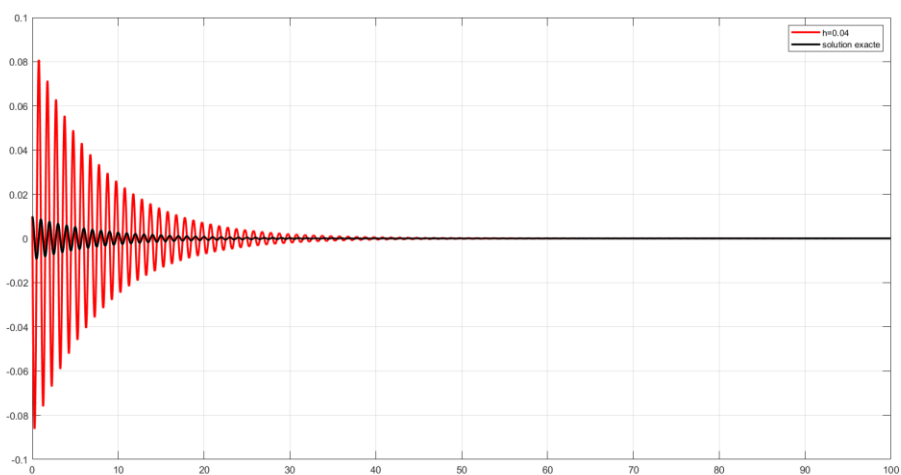


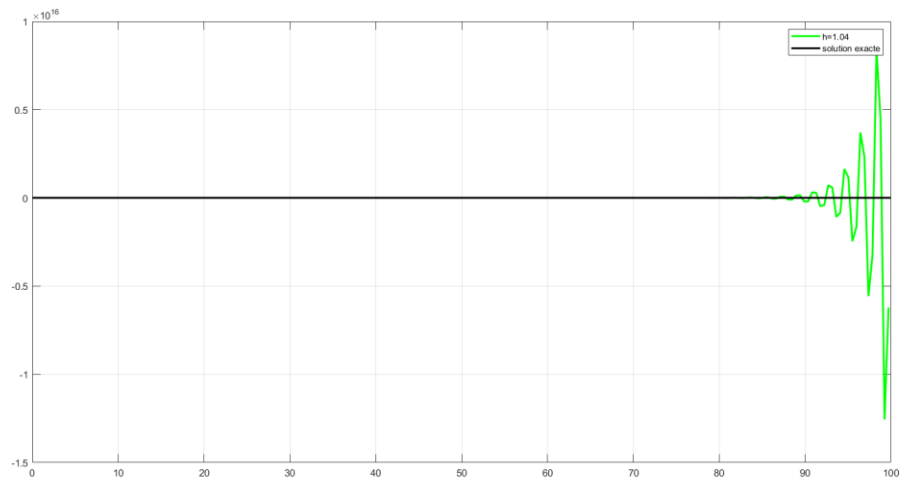
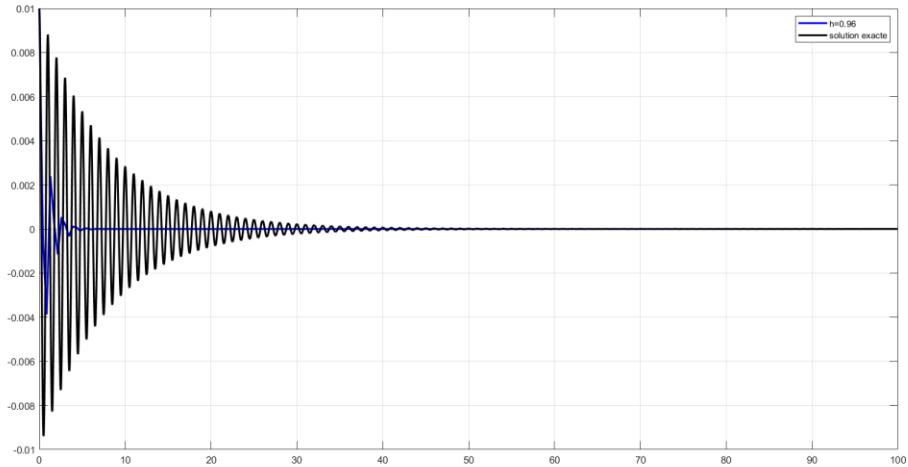
```

k1 = C*xj;
k2 = C*(xj+k1*dt1/2);
k3 = C*(xj+k2*dt1/2);
k4 = C*(xj+k3*dt1);
K = (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
xj = xj + K * dt1;
x1(inc) = xj(1);
dx1(inc) = xj(2);
end
plot(t,x1, '-r', 'Linewidth', 2)

hold on
omega=2*pi;
epsilon=0.02;
OMEGA=omega*(1-epsilon^2)^(0.5);
deltaT=2*epsilon/omega;
T0=1;
x=0.01;
xd=0;
J=linspace(0,100*T0,100*T0/deltaT);
Y0=(exp(-
epsilon*omega*J) .* (x*cos(OMEGA*J)+(epsilon*omega*x+xd) * (sin(OMEGA
A*J))/OMEGA);
plot(J,Y0,'k', 'Linewidth', 2);
legend('h=0.04', 'solution exacte');
grid on

```





Par les trois résultats, on peut trouver que quand  $h=0.04$  et  $h=0.96$ , les résultats sont stable et  $h=1.04$  n'est pas stable. Et  $h=0.04$  est plus précise que  $h=0.96$  et  $h=1.04$ .

1.3.b) On va calculer une valeur approximative du pas de temps critique  $\Delta t_c$ . Cette valeur sera donnée sous la forme

$$\Delta t_c = h_c \times \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0}$$

où  $h_{min} < h_c < h_{max}$  et  $|h_{max} - h_{min}| \leq 0.001$

## Etude d'un double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements

### 1. Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

1.1 On a

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = F_0 \sin \omega t \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

soit que

$$q_n = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_n$$

alors

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ddot{q}_n + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q_n = F_0 \sin \omega t \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q}_n + \left( ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \left( mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) q_n = \left( ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times F_0 \sin \omega t \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Donc

$$\ddot{q}_n + W^2 q_n = F \sin \omega t,$$

avec

$$W^2 = \left( ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} * \left( mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right),$$

$$F = \left( ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} * F_0 \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Pour un schéma de NEWMARK explicite, on a

$$\begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 * 0.5 * (F - W^2 q_j) \\ \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j - 0.5 \Delta t W^2 q_j - 0.5 \Delta t W^2 q_{j+1} + \Delta t F \end{cases}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 \Delta t W^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - 0.5 \Delta t^2 W^2 & \Delta t \\ -0.5 \Delta t W^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix} + F \sin \omega t \begin{bmatrix} 0.5 \Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix}$$

Soit que

$$B = \begin{bmatrix} I & 0 * I \\ 0.5 \Delta t W^2 & I \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} I - 0.5 \Delta t^2 W^2 & \Delta t * I \\ -0.5 \Delta t W^2 & I \end{bmatrix}$$

Alors

$$A = \text{inv}(B) * C = \begin{bmatrix} I - 0.5 \Delta t^2 W^2 & \Delta t * I \\ 0.25 \Delta t^3 W^4 - \Delta t W^2 & I - 0.5 \Delta t^2 W^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec } W^2 = \left( ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} * \left( mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2g}{a} & -\frac{g}{a} \\ -\frac{2g}{a} & \frac{2g}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39.24 & -19.62 \\ -39.24 & 39.24 \end{bmatrix}$$

1.2 A partir de cette matrice d'amplification, on va déterminer numériquement le pas de temps critique :

$$\det \left[ A - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

On souhaite que

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$

Donc

$$(\gamma + 1/2)^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\Delta t^2 W^2}$$

Alors

$$\Delta t^2 \leq \frac{4}{W^2}$$

Donc

$$\Delta t^2 \leq 0.102$$

$$\Delta t \leq 0.32$$

1.3 On va donner la relation entre  $q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0$  :

$$\ddot{q}_0 + W^2 q_0 = F \sin \omega t$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} -1.31519275 \\ -1.85996342 \end{bmatrix}$$

1.4 En présence d'une force dépendant du temps

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + 0.5 \Delta t^2 \ddot{q}_n \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + 0.5 \Delta t W^2 \ddot{q}_n + 0.5 \Delta t W^2 \ddot{q}_{n+1} \\ \ddot{q}_n + W^2 q_n = F \sin \omega t \\ \ddot{q}_{n+1} + W^2 q_{n+1} = F \sin \omega t \end{cases}$$

Avec

$$W^2 = (ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})^{-1} * (mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$$

$$F = (ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})^{-1} * F_0 \begin{bmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

1.5 Programmez la résolution en temps du problème avec un schéma de NEWMARK explicite :

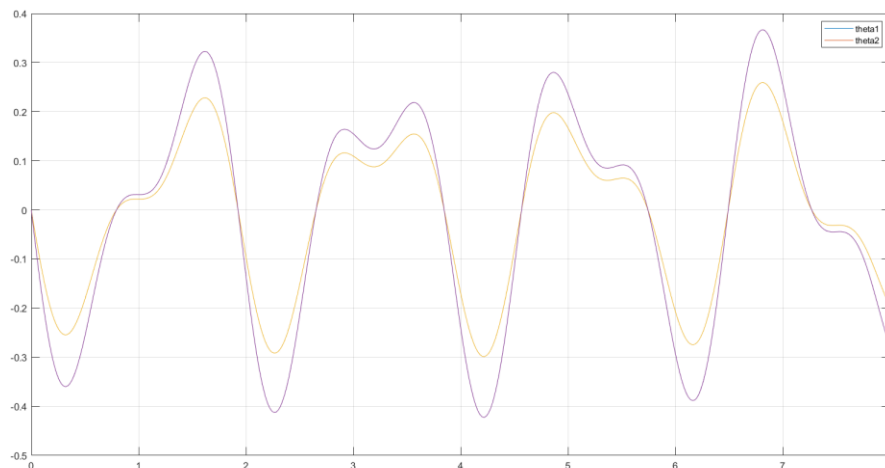
```
clear all;
clc;
dt1 = 0.02;
T0 = 8;
t = [0:dt1:T0]';
q0 = [0;0];
dq0 = [-1.31519275;-1.85996342];
a = 0.5;
m = 2;
g = 9.81;
F0 = 20;
```

```

W = 2*pi;
Beta = 0;
Gamma = 0.5;
I2 = [1 0;0 1];
W2 = inv([2,1;1,1])*m*g*a*[2,0;0,1]/(m*a*a);
F = inv([2,1;1,1])*F0*[a;a/sqrt(2)]/(m*a*a);
C = [I2 - dt1 * dt1 * (0.5 - beta) * W2 , dt1*I2 ; - (1 - gamma)
* dt1* W2 , I2];
B = [I2+beta*dt1*dt1* W2 , 0*I2 ; gamma*dt1* W2 , I2];
A = B\C;
vp=eig(A);
re = [real(vp(2));real(vp(4))];
im = [imag(vp(2));imag(vp(4))];
mo = [abs(vp(2));abs(vp(4))];
U(:,1)=[q0;dq0];
for i = 1:length(t)-1
    U(:,i+1) = A*U(:,i)+inv(B)*([0.5*dt1^2*I2 0*I2;0*I2
0.5*dt1*I2]*[F;F]*sin(w*i*dt1));
end
plot(t,U(1,:));
hold on;
plot(t,U(2,:));
legend('theta1','theta2');
ddq=F*(sin(w*t))'-W2*[U(1,:);U(2,:)];
grid on

```

1.6 Le résultat du schéma de NEWMARK explicite est comme la suivante:



Quang  $t = 0s$

$$q(t = 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dot{q}(0) = \begin{bmatrix} -1.32 \\ -1.86 \end{bmatrix}, \ddot{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quang  $t = \Delta t$

$$q(t = \Delta t) = \begin{bmatrix} -0.0262 \\ -0.0370 \end{bmatrix}, \dot{q}(0.02) = \begin{bmatrix} -1.31 \\ -1.85 \end{bmatrix}, \ddot{q}(0.02) = \begin{bmatrix} 1.03 \\ 1.46 \end{bmatrix}$$

Quang  $t = 2\Delta t$

$$q(t = 2\Delta t) = \begin{bmatrix} -0.0519 \\ -0.0734 \end{bmatrix}, \dot{q}(0.04) = \begin{bmatrix} -1.28 \\ -1.81 \end{bmatrix}, \ddot{q}(0) = \begin{bmatrix} 2.05 \\ 2.90 \end{bmatrix}$$

Quang  $t = 0.5s$

$$q(t = 0.5s) = \begin{bmatrix} -0.182 \\ -0.257 \end{bmatrix}, \dot{q}(0) = \begin{bmatrix} 0.693 \\ 0.981 \end{bmatrix}, \ddot{q}(0) = \begin{bmatrix} 2.09 \\ 2.95 \end{bmatrix}$$

## 2. Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite

2.1 on a

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + mga \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = F_0 \sin \omega t \begin{bmatrix} a \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} 2ma^2 \ddot{\theta}_1 + ma^2 \ddot{\theta}_2 + 2mga \theta_1 = F_0 \sin \omega t a \\ ma^2 \ddot{\theta}_1 + ma^2 \ddot{\theta}_2 + mga \theta_2 = F_0 \sin \omega t a / \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 2ma^2 \Delta_1 \ddot{q}_{j+1} + ma^2 \Delta_2 \ddot{q}_{j+1} + mga \Delta_1 q_{j+1} \\ & = F_0 \sin \omega t * a - (2ma^2 \ddot{q}_{j+1}^{*1} + ma^2 \ddot{q}_{j+1}^{*2} + 2mga q_{j+1}^{*1}) \end{aligned}$$

Avec

$$\Delta_1 q_{j+1} = \beta \Delta t^2 \Delta_1 \ddot{q}_{j+1}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} & (2ma^2 + 2mga \beta \Delta t^2) \Delta_1 \ddot{q}_{j+1} + ma^2 \Delta_2 \ddot{q}_{j+1} \\ & = F_0 \sin \omega t * a - (2ma^2 \ddot{q}_{j+1}^{*1} + ma^2 \ddot{q}_{j+1}^{*2} + 2mga q_{j+1}^{*1}) \end{aligned}$$

De même que

$$\begin{aligned} & ma^2 \Delta_1 \ddot{q}_{j+1} + (ma^2 + mga \beta \Delta t^2) \Delta_2 \ddot{q}_{j+1} \\ & = F_0 \sin \omega t * \frac{a}{\sqrt{2}} - (ma^2 \ddot{q}_{j+1}^{*1} + ma^2 \ddot{q}_{j+1}^{*2} + mga q_{j+1}^{*2}) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2ma^2 + 2mga \beta \Delta t^2 & ma^2 \\ ma^2 & ma^2 + mga \beta \Delta t^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_1 \ddot{q}_{j+1} \\ \Delta_2 \ddot{q}_{j+1} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} F_0 \sin \omega t * a - (2ma^2 \ddot{q}_{j+1}^{*1} + ma^2 \ddot{q}_{j+1}^{*2} + 2mga q_{j+1}^{*1}) \\ F_0 \sin \omega t * \frac{a}{\sqrt{2}} - (ma^2 \ddot{q}_{j+1}^{*1} + ma^2 \ddot{q}_{j+1}^{*2} + mga q_{j+1}^{*2}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc on obtient que

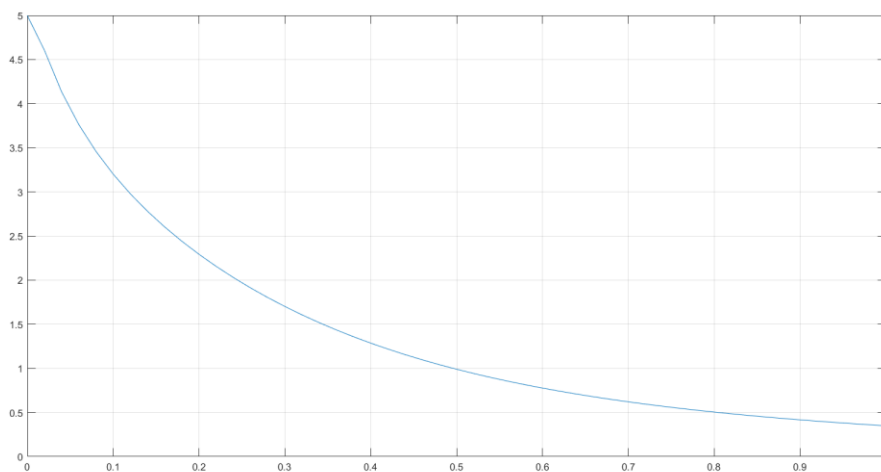
$$A = \text{inv} \left( \begin{bmatrix} 2ma^2 + 2mga \beta \Delta t^2 & ma^2 \\ ma^2 & ma^2 + mga \beta \Delta t^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$A = \text{inv} \left( \begin{bmatrix} 1 + 4.905\Delta t^2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 + 2.4525\Delta t^2 \end{bmatrix} \right)$$

2.2 Le graphique l'allure de l'évolution de la plus grande valeur propre de cette matrice en fonction du pas de temps :

```
clear all;
clc;
a = 0.5;
m = 2;
g = 9.81;
F0 = 20;
w = 2*pi;
dt2 = 0.02;
t2 = [0:dt2:1]';
beta = 0.25;
gamma = 0.5;
v=[5];
for i=1:length(t2)-1
    A=inv([2*m*a*a+2*m*g*a*beta*dt2*i m*a*a;m*a*a
m*a*a+m*g*a*beta*(dt2*i)^2])
    [z,d]=eig(A)
    re = real(d);
    im = imag(d);
    mo=abs(d);
    v=[v,max(max(d))];
end
plot(t2,v)
grid on
```

Le résultat est comme la suivante :



On peut trouver que le résultat est décroissante et la valeur propre maximale diminue avec le pas de temps  $\Delta t$  augmente.

2.3 On va donner la relation entre  $q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0$  :

$$\ddot{q}_0 + W^2 q_0 = F \sin \omega t$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} -1.31519275 \\ -1.85996342 \end{bmatrix}$$

2.4) D'après la matrice d'amplification , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 q_{j+1} = \beta \Delta t^2 \Delta_1 \ddot{q}_{j+1}; \quad \Delta_1 \dot{q}_{j+1} = \gamma \Delta t \Delta_1 \ddot{q}_{j+1} \\ \Delta_2 q_{j+1} = \beta \Delta t^2 \Delta_2 \ddot{q}_{j+1}; \quad \Delta_2 \dot{q}_{j+1} = \gamma \Delta t \Delta_2 \ddot{q}_{j+1} \\ \begin{bmatrix} 2ma^2 + 2mga \beta \Delta t^2 & ma^2 \\ ma^2 & ma^2 + mga \beta \Delta t^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_1 \ddot{q}_{j+1} \\ \Delta_2 \ddot{q}_{j+1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} F_0 \sin \omega t * a - (2ma^2 \ddot{q}_{1,j+1}^* + ma^2 \ddot{q}_{2,j+1}^* + 2mga q_{1,j+1}^*) \\ F_0 \sin \omega t * \frac{a}{\sqrt{2}} - (ma^2 \ddot{q}_{1,j+1}^* + ma^2 \ddot{q}_{2,j+1}^* + mga q_{2,j+1}^*) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$



## Oscillateur non linéaire à un degré de liberté

### 1. Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

1.1 On a

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2(0.5 - \beta)\ddot{q}_j + \Delta t^2\beta\ddot{q}_{j+1}$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{q}_j + \Delta t\gamma\ddot{q}_{j+1}$$

$$q_{j+1}'' = -\omega_0^2 q_{j+1}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta\Delta t^2 \\ 0 & 1 & -\gamma\Delta t \\ \omega_0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ q_{j+1}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2(0.5 - \beta) \\ 0 & 1 & \Delta t(1 - \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{bmatrix}$$

Et

$$q_{j+1}'' = -\omega_0^2 q_{j+1}$$

$$\ddot{q}_j = -\omega_0^2 q_j$$

$$\text{On a } \begin{bmatrix} 1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2 & 0 \\ \gamma\Delta t\omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t^2(0.5 - \beta)\omega_0^2 & \Delta t \\ (\gamma - 1)\Delta t\omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

$$\text{Comme } B \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = (B^{-1} \times C) \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

matrice d'amplification

$$A = (B^{-1} \times C)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2)} & \frac{\Delta t}{1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2} \\ -\omega_0^2 \Delta t \left[ 1 - \frac{\gamma\omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2)} \right] & 1 - \frac{\gamma\omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2)} \end{bmatrix}$$

Car  $\beta = 0, \gamma = 0.5$

On a

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2 \Delta t^2}{2} & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t \left[ 1 - \frac{0.5\omega_0^2 \Delta t^2}{2} \right] & 1 - \frac{0.5\omega_0^2 \Delta t^2}{2} \end{bmatrix}$$

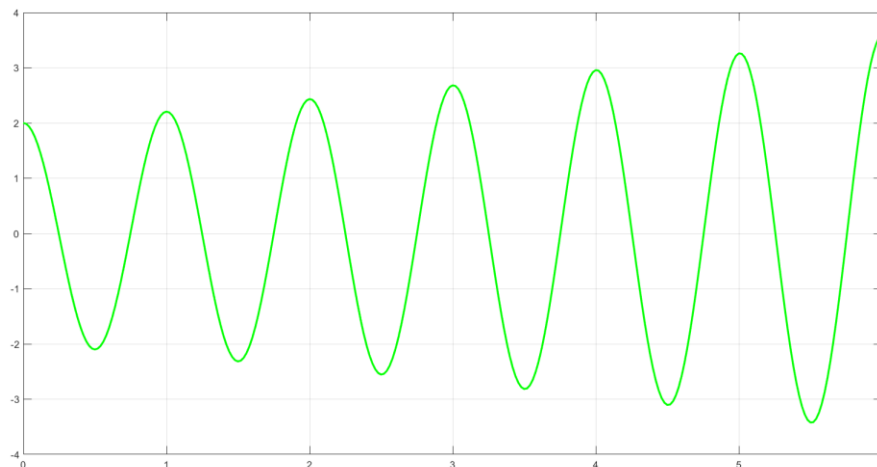
1.2 La résolution de l'équation différentielle (2) avec un schéma de NEWMARK explicite :

```
clear all
clc;
dt1 = 0.02;
```

```

T0 = 6;
w0 = 2*pi;
q0 = 2;
dq0 = 0;
a = 0.1;
w0c = w0*w0;
t1 = (0:dt1:T0)';
np1 = size(t1,1);
q1 = zeros(np1,1);
dq1 = zeros(np1,1);
q1(1) = q0;
dq1(1) = dq0;
for inc = 2 : np1
q1(inc) = q1(inc-1)*(1-0.5*w0c*dt1*dt1) + dt1*dq1(inc-1);
dq1(inc) = q1(inc-1)*w0c*dt1*(0.25*w0c*dt1*dt1-1) + dq1(inc-1)*(1-0.25*w0c*dt1*dt1);
end
plot (t1,q1, '-g','Linewidth',2)
grid on

```



1.3 On choisit  $\Delta t = 0.02$  s. Les valeurs numériques de  $q(t)$  pour les valeurs de  $t$  égales à  $0s$ ,  $\Delta t$ ,  $2\Delta t$  et  $T_0$  est

$$\begin{aligned}
 q_{t=0} &= 2 \\
 q_{t=\Delta t} &= 1.9842 \\
 q_{t=2\Delta t} &= 1.9371 \\
 q_{t=T_0} &= 3.5927
 \end{aligned}$$

## 2. Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite

2.1 On doit chercher à minimiser la correction entre la valeur exact et la valeur estimée.

2.2 Calcul de la correction :

$$f(\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}, q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}) = 0$$

$$\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}^{\ddot{}} + \omega_0^2 (q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}) (1 + a(q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1})^2) = 0$$

$$f(\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}, q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}) = 0 = f(\ddot{q}_{j+1}^*, q_{j+1}^*) + \frac{\partial f}{\partial q_{j+1}^*} \Delta q_{j+1} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{q}_{j+1}^*} \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}$$

avec  $\Delta q_{j+1} = \beta \Delta t^2 \Delta q_{j+1}^{\ddot{}}$

on obtient que

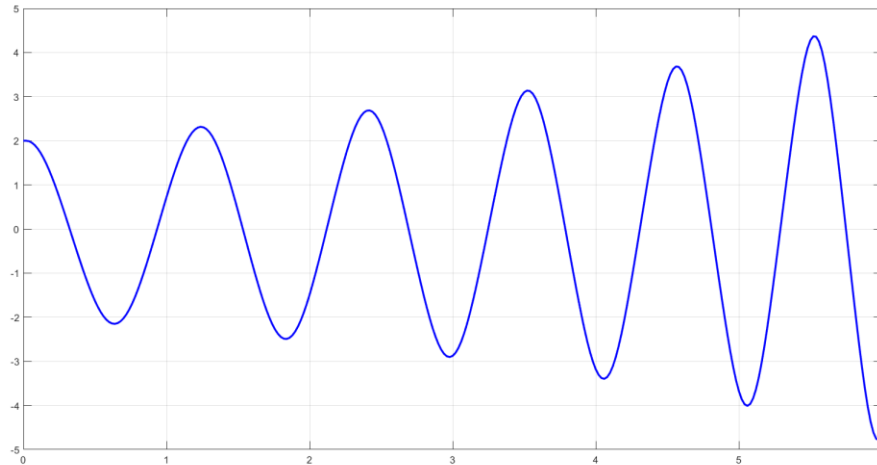
$$\Delta q_{j+1}^{\ddot{}} = - \frac{f(\ddot{q}_{j+1}^*, \dot{q}_{j+1}^*, q_{j+1}^*)}{\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}_{j+1}^*} + 0.25 \frac{\partial f}{\partial q_{j+1}^*} \Delta t^2}$$

2.3 On a  $\ddot{q}_{j+1}^0 = 0$

$$\dot{q}_{j+1}^0 = \dot{q}_j + 0.5 \Delta t \ddot{q}_j$$

$$q_{j+1}^0 = q_j + \Delta t \dot{q}_j + 0.25 \Delta t^2 \ddot{q}_j$$

```
clear all
clc;
dt2 = 0.02;
T0 = 6 ;
q0 = 2;
dq0=0 ;
a = 0.1;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t2 = (0:dt2:T0)';
np2 = size(t2,1);
q2 = zeros(np2,1);
dq2 = zeros(np2,1);
q2(1) = q0;
dq2(1) = dq0;
ddq2(1) = 0;
for inc = 2 : np2
q2(inc) = q2(inc-1)+dt2*dq2(inc-1)+0.25*dt2*dt2*ddq2(inc-1);
dq2(inc) = dq2(inc-1)+0.5*dt2*ddq2(inc-1);
ddq2(inc) = -w0c*q2(inc)*(1+a*q2(inc)*q2(inc));
end
plot(t2,q2,'b-', 'Linewidth',2)
grid on
```



2.4 On choisit  $\Delta t = 0.02$  s. Les valeurs numériques de  $q(t)$  pour les valeurs de  $t$  égales à  $0$  s,  $\Delta t$ ,  $2\Delta t$  et  $T_0$  est

$$\begin{aligned} q_{t=0} &= 2 \\ q_{t=\Delta t} &= 1.9889 \\ q_{t=2\Delta t} &= 1.9559 \\ q_{t=T_0} &= -4.6870 \end{aligned}$$

### 3. Energie mécanique

3.1 On définit l'énergie mécanique pour cet oscillateur non linéaire

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k q^2 - kq(1 + aq^2) \\ E &= m \left( -\frac{k}{m} a q^3 + \frac{k}{m} \frac{q^2}{2} - \frac{k}{m} q + \frac{1}{2} q^2 \right) \end{aligned}$$

Car  $\frac{k}{m} = \omega_0$

Donc

$$E = m \left( -\omega_0 a q^3 + \omega_0 \frac{q^2}{2} - \omega_0 q + \frac{1}{2} q^2 \right)$$

On pose que  $E^* = \frac{E}{m}$

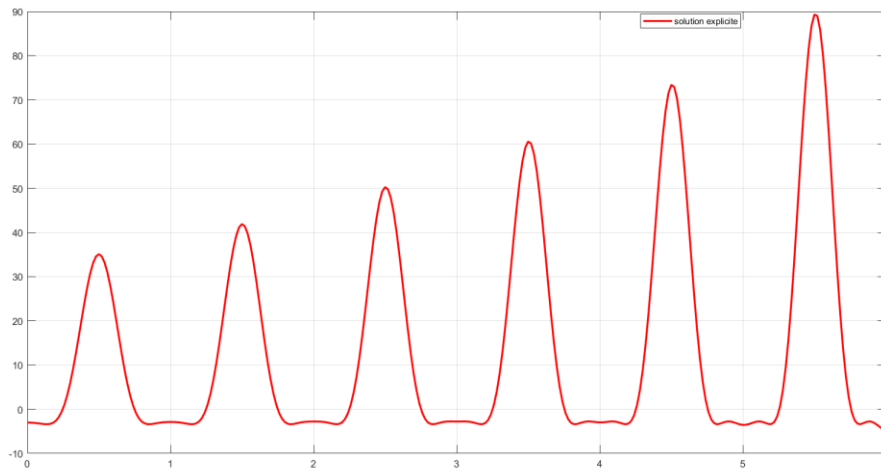
Alors

$$E^* = -\omega_0 a q^3 + \omega_0 \frac{q^2}{2} - \omega_0 q + \frac{1}{2} q^2$$

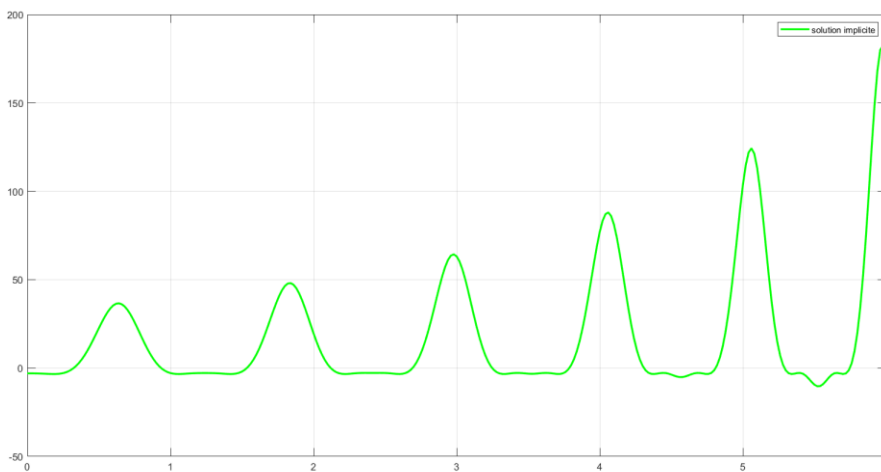
3.2 Programmez le calcul de cette énergie mécanique pour les deux schémas d'intégration :

```
energ1 = -w0*a*(q1).^3+w0*0.5*(q1).^2-w0*q1+0.5*(q1).^2;
plot(t1,energ1,'r-','Linewidth',2)
legend('solution exacte');
```

Solution explicite :



Solution implicite :



3.3 Les deux résultats sont croissant, c'est-à-dire que les énergie mécanique du système de oscillateur non linéaire à un degré de liberté devient de plus en plus grand. Et le résultat implicite augmente plus rapidement que la solution explicite.