

3.1 Programmez la résolution de l'équation (1) à l'aide d'un schéma d'EULER implicite :

méthode 1 : sans la matrice d'amplification

```
clear all
dt2 = 0.01;
T0=3 ;
q0 =1;
dq0=0 ;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t2 = (0:dt2:T0)';
np2 = size(t2,1);
q2 = zeros(np2,1);
dq2 = zeros(np2,1);
energ2 = zeros(np2,1);
q2(1) = q0;
dq2(1) = dq0;
for inc = 2 : np2
q2(inc) = (q2(inc-1) + dt2 * dq2(inc-1))/(1 + w0c * dt2 * dt2);
ddqc = -w0c * q2(inc);
dq2(inc) = dq2(inc-1) + dt2 * ddqc;
end
energ2 = 0.5*(dq2 .* dq2 + w0c * (q2.^2));
plot(t2,q2,'b-', 'Linewidth',3)
grid on
```

méthode 2 : avec la matrice d'amplification

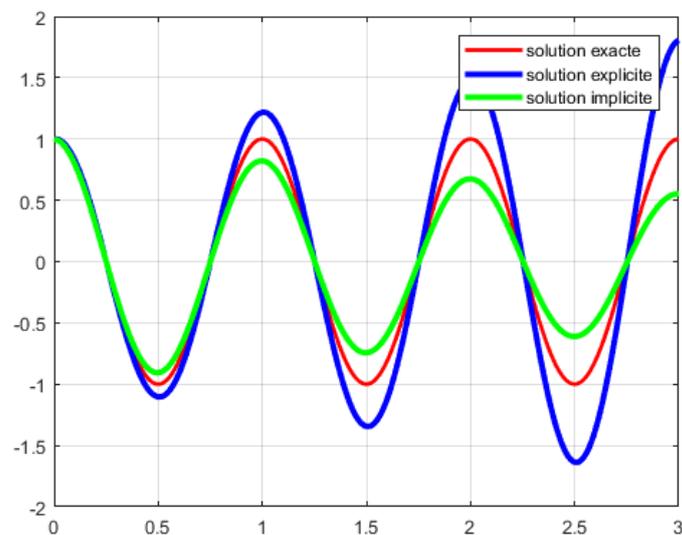
```
clear all
dt2 = 0.01;
T0=3 ;
q0 =1;
dq0=0 ;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
t2 = (0:dt2:T0)';
np2 = size(t2,1);
q = [q0;dq0];
q2b = zeros(np2,1);
dq2b = zeros(np2,1);
q2b(1) = q0;
```

```

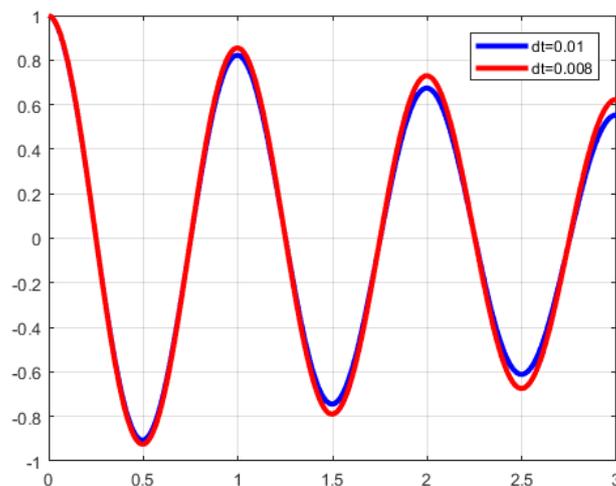
dq2b(1) = dq0;
A = [1 , dt2 ; -w0c * dt2 , 1];
A = A / (1 + w0c * dt2 * dt2);
for inc = 2 : np2
q = A * q;
q2b(inc) = q(1);
dq2b(inc) = q(2);
end;
energ2m = 0.5*(dq2b .* dq2b+ w0c * (q2b .^2));
plot(t2,q2b, 'b-', 'Linewidth', 3)

```

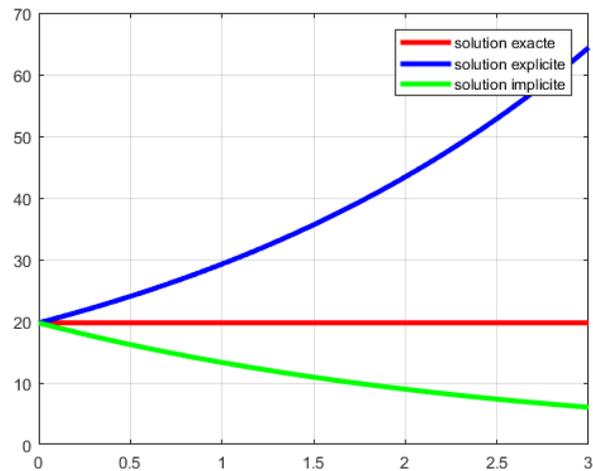
3.2 Les valeurs de q obtient par les trois méthodes sont comme la suite :



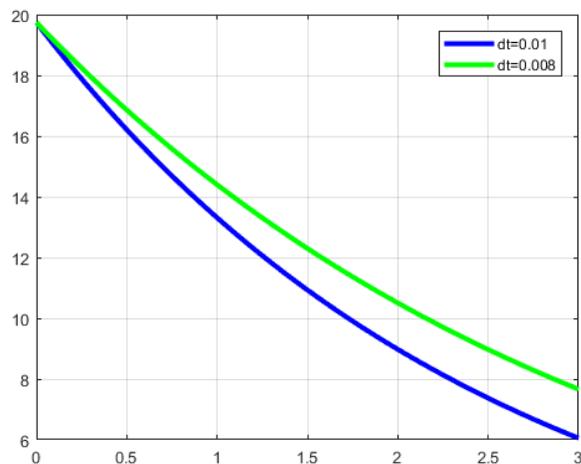
3.3 En testant différents pas de temps, On peut remarquer que plus le pas de temps est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.



3.4 La quantité  $E^*$  associée au schéma d'EULER implicite et les valeurs obtenues avec celles calculées précédemment à l'aide de la solution exacte et d'un schéma d'EULER explicite sont comme la suite. On peut trouver que La quantité  $E^*$  associée au schéma d'EULER implicite diminue et La quantité  $E^*$  associée au schéma d'EULER explicite augmente.



Quand on change le pas de temps, on peut trouver que plus le pas de temps est petit, plus la divergence est lente.



3.5 En d'eterminant numériquement les valeurs propres de la matrice d'amplification en fonction du pas de temps  $\Delta t$  du schéma d'EULER implicite.

```
close all;
clc;
dt1= sym('dt1','real');
w0= sym('w0','real');
A = [1 , -dt1 , 0 ; 0 , 1 , -dt1; w0 * w0, 0 , 1];
B = [1 , 0 , 0 ; 0 , 1, 0; 0 , 0 , 0];
C= A\B;
% identique C = inv(A) * B
% Vecteurs et valeurs propres
```

```
[z,d] = eig(C)
simplify(d)
mo=abs(d)
% module <1 ? Oui schéma inconditionnellement stable
eval(mo)
```

On obtient que

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{\Delta t \omega_0 + i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t \omega_0 i + 1} \end{bmatrix}$$

$$mo = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|\Delta t \omega_0 + i|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{|\Delta t \omega_0 i + 1|} \end{bmatrix} \text{ avec module de } mo < 1$$

Donc le caractère inconditionnellement stable du schéma d'EULER implicite.

#### 4.1 Equation de mouvement (1) :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

On pose que

$$\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = \dot{q} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 \end{cases}$$

Donc on a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

#### 4.2 On programme la résolution de l'équation du mouvement que on a obtenue à la question 4.1 à l'aide d'un schéma de RUNGE KUTTA.

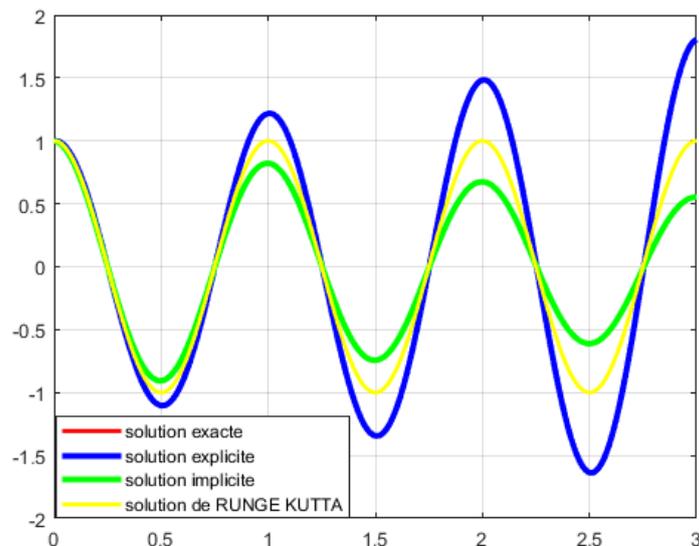
```
clear all
clc;
T0=3;
q0 =1;
dq0=0;
w0 = 2*pi;
w0c = w0*w0;
dt3 = 0.01;
t3 = (0:dt3:T0)';
np3 = size(t3,1);
q3 = zeros(np3,1);
dq3 = zeros(np3,1);
```

```

energ3 = zeros(np3,1);
q3(1) = q0;
dq3(1) = dq0;
qj = [q0 ; dq0];
C = [0 1; -w0c 0];
for inc = 2 : np3
k1 = C*qj;
k2 = C*(qj+k1*dt3/2);
k3 = C*(qj+k2*dt3/2);
k4 = C*(qj+k3*dt3);
K = (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
qj = qj + K * dt3;
q3(inc) = qj(1);
dq3(inc) = qj(2);
end
energ3 = 0.5*(dq3 .* dq3 + w0c * (q3.^2));
plot(t3,q3, '-r', 'Linewidth',2)
plot(t3,energ3, 'r-', 'Linewidth',3)

```

4.3 Comparez les valeurs de la solution  $q(t)$  obtenues avec un schéma de RUNGE KUTTA avec celles calculées précédemment (solution exacte, schéma d'EULER explicite et schéma d'EULER implicite), on peut trouver que la solution de schéma d'EULER explicite est plus grand que la solution exacte et la solution de schéma d'EULER implicite est plus petit que la solution exacte et ils sont divergents. Mais la solution de schéma de RUNGE KUTTA est presque la même avec la solution exacte.



4.4 On calcule la quantité  $E^*$  associée au schéma de RUNGE KUTTA et comparez les valeurs obtenues avec celles calculées à l'aide de la solution exacte, d'un schéma d'EULER explicite et d'un schéma d'EULER implicite. On peut trouver que la solution

du schéma de RUNGE KUTTA a la même de quantité avec la solution exacte, mais la solution d'un schéma d'EULER explicite et d'un schéma d'EULER implicite sont pas précises.

